Henri Poincaré : Trois suppléments sur les fonctions fuchsiennes

Publié par Jeremy Gray & Scott A. Walter, Berlin : Akademie Verlag

1997 ; electronic edition with corrections, 2016

Table des matières

Part I

Poincaré's Three Supplements

Chapter 1

Introduction Jeremy Gray and Scott A. Walter

The three *suppléments* by Poincaré, written in 1880, are published here for the first time. They document his discovery of automorphic functions and the important role non-Euclidean geometry can play in complex function theory. They precede his published papers of 1881 on the subject, and they show in detail how he made and exploited a succession of insights into what was to become his first major contribution to mathematics.

To assist in the understanding of these papers we first indicate something of Poincaré's life at the time, and describe the context in which he was working. Then we summarize and analyze the mathematical content of the *suppléments*, focusing on what is new and significant in what he did. We indicate also how these discoveries made their way into the many papers that Poincaré was to publish on this subject. Lastly, we indicate briefly how these *suppléments* came to be rediscovered, and conjecture how they were lost.

1.1 The context

Poincaré celebrated his twenty-sixth birthday on April 29, 1880. At that time he was *Chargé de cours d'Analyse mathématique* at the Caen Faculty of Science. After graduating second in his class at the *École polytechnique* in 1875 (poor marks in descriptive geometry cost him the top position), Poincaré went on to the *École des mines* in Paris. This was the normal career path for the top graduates of *Polytechnique*; in Poincaré's class only the top three students made it into *Mines* (which must have added spice to the competition for grades). Once Poincaré was enrolled in mining school, his mentor Ossian Bonnet intervened with the school administration on his behalf; he asked that Poincaré be allowed to skip some required courses in docimasy in favor of lectures in mathematics across the street at the university he taught at, the Sorbonne.

When the director of *Mines* personally informed Poincaré that the study of mathematics was incompatible with his status as a student engineer, he accepted the decision with magnanimity.

A path leading from the *École polytechnique* and the *École des mines* to a university teaching career had been worn by some of the professors Poincaré most admired, including Camille Jordan and Alfred Cornu. It is unlikely that he ever considered a career as a mine inspector, but that is exactly what he became once he obtained the diploma from *Mines*. Not that this was a shameful occupation. The mine inspector in late nineteenth century France was a highly esteemed individual, one who jeopardized his life in the service of the country. The dangerous nature of this occupation may be judged from the fact that neither of Poincare's two comrades from *Polytechnique* attained the age of thirty.

For all that he impressed everyone who met him with his quickness of mind, Poincaré was not a prodigy. Nor was he particularly well read, preferring to make his own way through contemporary mathematics. By 1880, he still had only two short publications to his name, although in 1878 he had written a doctoral thesis that Darboux, one of his examiners, said contained the material for several good theses (Darboux et al. 1916, xxi). Rather more sharply, Darboux also observed that the methods in the thesis often fell short of rigorous proof, and had urged Poincaré to tighten it up. Instead Poincaré replied that there were other ideas he would rather work on, and in the event, the thesis was not published (until it appeared in the first volume of his *Œuvres*, in 1928). Nominally devoted to extending Kovalevskaya's theorem about partial differential equations in the complex domain, where it foreshadowed part of the analysis of celestial mechanics he later gave in his prize-winning memoir of 1889, the thesis also contained important results on lacunary series and algebroid functions, which came to play an important part in the study of complex functions of several variables. (For a rich account of the writing of this memoir, see Barrow-Green 1997).

The thesis permitted Poincaré to give a course in analysis at the *Faculté des sciences* at Caen; he was officially released from his duties as a mine inspector on December 1, 1879. He was by then thinking about the global theory of real differential equations which he was to develop and incorporate into his celestial mechanics (see Gilain 1977, 1991). But he was also engaged with the theory of differential equations in the complex domain, the subject of his paper of 1878. The theory was then the central topic in the study of ordinary differential equations (see, for example, Gray 2000). The French authorities on the subject had been Briot and Bouquet, but more recently, leadership had passed to a student of Kummer's, much influenced by Weierstrass, the German Lazarus Immanuel Fuchs. Fuchs had succeeded in 1866 in classifying those ordinary linear differential equations whose solutions have fixed singular points at which they have, at worst, finite poles. This is a large class of differential equations which contains the celebrated hypergeometric equation. Fuchs's work on this topic formed the natural generalization of Riemann's paper on the so-called P-functions. Since then, Fuchs had solved a number of related problems, including some concerned with elliptic integrals and modular functions by means of his theory. This brought him into contact with Hermite.

Hermite's contact with Fuchs was an important route for German ideas to reach France. He was not comfortable with the methods of Riemann, and barely mentioned them in either his *Cours d'analyse* (1873) or in his later course (1881). But if, unhappily for French mathematics, he shared with Fuchs a failure to understand Riemann's more profound ideas, his appreciation of Fuchs's work was to benefit Poincaré. Hermite was the most influential French mathematician of his generation, alongside Bertrand. Bertrand occupied more prestigious positions, but Hermite's research carried greater weight. Between them they could more-or-less decide who was to get the call to Paris and who was to languish in the provinces. Hermite's failure with Riemann goes some way in explaining why Riemann's ideas had to wait for Picard and Poincaré in the 1880s before they took off in France, well after their adoption by the leading Italian mathematicians.

One way a mathematician like Hermite exerted his influence was through the prize competitions run by the *Académie des sciences* in Paris. It was the custom throughout the nineteenth century for the *Académie* to announce various prizes in mathematics. Typically, a title would be announced, with a panel of judges, and a cut-off date some two years hence. A system of sealed envelopes and mottoes was used to try to ensure anonymity. The entries would be judged, and perhaps a prize would be awarded. But it might well happen that no entry was thought worthy. In that case the essay might be re-announced. On occasion, the prize would go to someone for their work, whether or not it fit the title—this was the case when Abel and Jacobi won the prize in 1830. To avoid this sort of embarrassment, the essays would sometimes be devised with a likely winner in mind, as was the case when Kovalevskaya won the *Prix Bordin* (see Cooke 1984). In 1878, Hermite took the opportunity to set an essay on Fuchs's work that he may well have thought would catch the interest of Poincaré, and of course Poincaré had been Hermite's student at the *École polytechnique*.

A prize competition was thus announced by the Academy in 1878. The question set was "To improve in some important way the theory of linear differential equations in a single independent variable" ("*Perfectionner en quelque point important la théorie des équations différentielles linéaires à une seule variable indépendante*"). The closing date was 1880; and the panel of judges comprised Bertrand, Bonnet, Puiseux and Bouquet, with Hermite as *rapporteur*.

On March 22, 1880, Poincaré submitted a memoir on the real theory, which he withdrew on June 14, before the examiners could report on it. It would seem that his imagination had been captured by the very different complex case, which he wrote up and submitted on May 29, 1880.

This essay was only to be published posthumously, in *Acta Mathematica* 39 (Poincaré 1923) and in the first volume of his *Œuvres* (Appell & Drach 1928, 336–372), along with his doctoral thesis.

The next day he wrote the first of several letters to Fuchs. Shortly afterwards he had the first breakthrough into the topic of automorphic functions, and wrote the first of the three *suppléments* published in this volume. It is, of course, this connection through Hermite to Fuchs, and Poincaré's patchy reading, that explains why Poincaré chose to call a large class of automorphic functions "Fuchsian". To understand the chain of thought that led to the prize essay and the *suppléments*, it is best to review briefly Fuchs's work and then the original essay.

1.2 The work of Fuchs

In a series of papers in 1880 (continuing into 1881, this summary follows Fuchs 1880c, 1904, 191–212; 1880a, 1880b, 1906, 213–218), Fuchs studied the differential equation

$$\frac{d^2y}{dz^2} + P(z)\frac{dy}{dz} + Q(z)y = 0 \tag{1.1}$$

where P and Q are rational functions of a complex variable z. He took functions $f(z)$ and $\phi(z)$ as a basis of solutions for it, and sought to generalize Jacobi inversion from the context of integrals to differential equations by considering the equations

$$\int_{\zeta_1}^{z_1} f(z)dz + \int_{\zeta_2}^{z_2} f(z)dz = u_1$$
$$\int_{\zeta_1}^{z_1} \phi(z)dz + \int_{\zeta_2}^{z_2} \phi(z)dz = u_2 \tag{1.2}$$

as defining functions of u_1 and u_2:

$$z_1 := F_1(u_1,\ u_2), \quad z_2 := F_2(u_1,\ u_2).$$

By varying the paths of integration he obtained these equations for them:

$$F_i(\alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \alpha_1 c,\ \alpha_{21}u_2 + \alpha_{22}u_2 + \alpha_2 c) = F_i(u_1,\ u_2), \quad i = 1, 2$$

where the integers α_{ij} describe the analytic continuation of u_1 and u_2 along paths that cross the cuts joining the singularities of (1) to ∞; α_1 and α_2 are analogous to the periods of an elliptic integral.

Fuchs wished to ensure that the four derivatives $\frac{\partial z_i}{\partial u_j}$ are holomorphic functions of z_1 and z_2 near $z_1 = a$, $z_2 = b$, where a and b are arbitrary distinct points, and that every value $(z_1,\ z_2) \in \mathbb{C}$ can be attained with finite $(u_1,\ u_2) = \mathbb{C}$. For this he said it is necessary and sufficient that at each finite singular point the roots of the associated indicial equation satisfy certain simple conditions (roughly speaking, that they be rational numbers of a precise kind). With increasing obscurity, he then argued that extra conditions on the roots of the indicial equation ensured that the equation

$$\frac{f(z)}{\phi(z)} = \zeta$$

defines z as a single-valued function of ζ and that the equation $f(z_2) - \phi(z_1) - f(z_1)\phi(z_2)$ has only the trivial solution $z_1 = z_2$. In particular, he stipulated that the solutions to the differential equation may not involve logarithmic terms. In an even more special case the number of finite singular points can not be greater than six, and he gave an example where six finite singular points occur. The functions

$$z_1 := F_1(u_1, u_2), \quad z_2 := F_2(u_1, u_2)$$

are then necessarily hyperelliptic, but generally they will not even be Abelian functions, since the differential equation will not be algebraically integrable.

Fuchs's proofs of these assertions proceeded by a case-by-case analysis of each kind of singularity that could occur in terms of the local power series expansions of the functions. As we shall see, Poincaré was to point out that the analysis rapidly becomes confusing and was incomplete, in any case. The condition that no logarithmic terms appear in the solutions to the differential equation even though Fuchs allowed that roots of an indicial equation may differ by 1, an integer, is a strong restriction on the kind of branching that can occur. Fuchs seems to have assumed, or perhaps was only interested in, the case when ζ takes every value in $\mathbb{C}$, not merely in some disc.

As an example of the case when there are six singular points, Fuchs adduced the hyperelliptic integrals

$$y_1 = \int \frac{g(z)}{\sqrt{\phi(z)}} dz, \quad y_2 = \int \frac{h(z)}{\sqrt{\phi(z)}} dz$$

where $\phi(z) = (z - a_1) \dots (z - a_6)$ and ∞ is not a singular point. In this case $g(z)$ and $h(z)$ are linearly independent polynomials of degree 0 or 1 (say $g(z) := 1$, $h(z) := z$). Now $z_1 = F_1(u_1, u_2)$, $z_2 = F_2(u_1, u_2)$ are hyperelliptic functions of the first kind.

Fuchs was chiefly concerned to study the inversion of equations (2) and was only slightly interested in the function $\zeta = \frac{f(z)}{\phi(z)}$. His obscure papers rather confused the two problems, but they were soon to be disentangled, in the course of a correspondence that the young Poincaré began once he had submitted his essay for the prize competition.

1.3 The prize essay

In the essay Poincaré focused on the question of when the quotient $z = \frac{f(x)}{g(x)}$ of two independent solution of a differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} = Qy$ defines, by inversion, a meromorphic function x of z. He found Fuchs's conditions were neither necessary nor sufficient, because the nature of the domain of definition of the inverse function had not been adequately considered. It was necessary and sufficient for x to be meromorphic on some domain that the roots of the indicial equation at each singular point, including infinity, differ by an aliquot part of unity (i.e. $\rho_1 - \rho_2 = 1/n$, for some positive integer n). If the domain is to be the whole complex sphere then this condition is still necessary, but it is no longer sufficient. Finding that Fuchs's methods did not enable him to analyze the question very well, as special cases began to proliferate, he sought to give it a more profound study, working upwards from the simplest cases. He began with an example of Fuchs's where the differential equation has two finite singular points and certain exponent differences. These forced x to be a meromorphic single-valued function of z mapping a parallelogram composed of eight equilateral triangles onto the complex sphere, and $z = \infty$ is its only singular point, so x is an elliptic function. The differential equation, Poincaré showed, has in fact an algebraic solution and a non-algebraic solution. This result agrees with Fuchs's theory.

Poincaré next investigated when a doubly-periodic function can give rise to a second-order linear differential equation, and found after a lengthy argument that there was always such an equation having rational coefficients for which the solution was a doubly periodic function having two poles. If furthermore the periods h and K were such that

$$2\mathrm{i}\pi \equiv (\mathrm{mod}\, h, K)$$

then x would be a monodromic function of z with period $2i\pi$.

After a further argument Poincaré concluded (79) that there are cases when one solution of the original differential equation is algebraic, and then Fuchs's theory was correct. However, there are also cases when the differential equation has four singular points and elliptic functions are involved; then extra conditions are needed.

However, it might be that the domain of x failed to be the whole z-sphere. Poincaré gave an example to show that this could happen even when the differential equation has only two finite singular points. If the exponent differences are $\frac{1}{4}$ and $\frac{1}{2}$ at the finite points and $\frac{1}{6}$ at ∞, and the finite singular points are joined to ∞ by cuts, then as long as x crosses no cuts z stays within the quadrilateral $\alpha O \alpha' \gamma$ (see Figure 1). The image of the upper and lower half planes are triangles that form a quadrilateral joined along the image of the line joining the singular points.

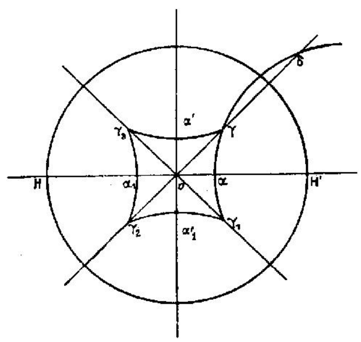


Figure 1

As x is conducted about in its plane, the values of z lie inside the circle HH'. All the images of the upper and lower half planes taken together are quadrilaterals Poincaré described as '*mixtiligne*', with circular-arc sides meeting the circle *HH'* at right angles. For a range of similar differential equations this geometric picture is quite general: curvilinear polygons are obtained with non-re-entrant angles and circular-arc sides orthogonal to the boundary circle. They fill out the domain of the function x in $|z| < OH$, and Poincaré then investigated whether x is meromorphic. This reduces to showing that, as x is continued analytically, the polygons do not overlap. This does not occur if the angles satisfy conditions derived from Fuchs's theory, unless the overlap is in the form of an annular region:

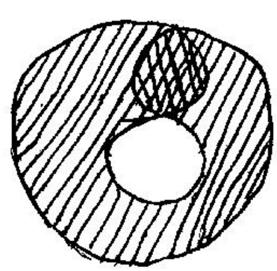


Figure 2

However, if the angles are not re-entrant, this cannot happen, and so x is meromorphic.

1.4 The correspondence between Poincaré and Fuchs

The essay out of the way, Poincaré could turn to some of the problems that had occurred to him while reading Fuchs's work. One of his first questions to Fuchs concerned the nature of the inverse function ($z = z(\zeta)$ in Fuchs's notation).[1] Fuchs had claimed that z is always a meromorphic function of $\zeta = \frac{f(z)}{g(z)}$, whether z is an ordinary or a singular point of the differential equation. He showed, in fact, that z is finite at ordinary points and infinite at singular points. Poincaré observed that z is meromorphic at $\zeta = \infty$, which makes $z = z(\zeta)$ meromorphic on the whole ζ-sphere, and so it is a rational function of ζ. This then implies that the original differential equation must have all its solutions algebraic, which Fuchs had expressly denied. It is again a problem of the domain of definition. Poincaré suggested that there were three kinds of ζ-value: those reached by $\frac{f(z)}{g(z)}$ as z traced out a finite contour on the z-sphere; those reached on an infinite contour, and those which are not attained at all. *A priori,* he said, all three situations could occur, and unless the differential equation has only algebraic solutions, the last two would occur. Fuchs's proof only worked for ζ-values of the first kind; however, Poincaré went on, he could show that $z(\zeta)$ was meromorphic even if the other kinds occurred, and he was led to hypothesize: (1) if indeed all ζ-values were of the first kind then z would be a rational function; (2) if there are values of only the first and second kinds, but z is single-valued at the values of the second kind, then Fuchs's theorem is still true; (3) if z is not single-valued or (4) if the values of the third kind occur and so the domain of z is only part of the ζ-sphere, then z is single-valued on D. In this case the ζ-values of the first kind occur inside D. Those of the second kind lie on the boundary of D, and the unattainable values lie outside D. Finally there is a fifth case, when all three kinds of ζ-value occur, but D has this form:

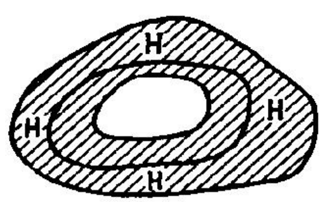


Figure 3

where values of the first kind fill out the annulus. Now, said Poincaré, z will not return to its original value on tracing out a closed curve $HHHH$ in D.

1. Seven letters in the Poincaré-Fuchs correspondence are published in Julia & Pétiau (1956, 13–25), with an eighth in the photograph on pages 275–276.

Fuchs replied on the fifth of June. He agreed that his Theorem I was imprecisely worded, and returned to the hypotheses of his earlier *Göttingen Nachrichten* articles about the exponents at the singular points. He added that he excluded paths in which $f(z)$ and $\phi(z)$ both become infinite, which, he said, ensured that the remaining ζ-values filled out a simply-connected region of the ζ-plane with the excluded values on the boundary.

Poincaré replied on the twelfth. Finding that some parts of the proof were still obscure he suggested this argument. Let the singular points of the differential equation be joined to ∞ by cuts. The image of this region (when z is not allowed to cross the cuts) is a connected region F_0. If z crosses the cuts no more than m times, then the values of ζ fill out a connected region F_m. As m tends to infinity F_m tends to the region Fuchs called F, and F will be simply-connected if F_m is simply-connected for all m. "Now," asked Poincaré, "is that a consequence of your proof? One needs to add some explanation." He agreed that F_m could not cover itself as it grew in this fashion:

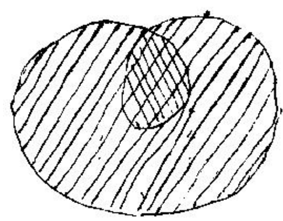


Figure 4

but the proof left open the possibility that the crossing formed an annular region (as in Figure 2, above).

Poincaré said that when there were only two finite singular points it was true that z was a single-valued function, "That I can prove differently," he went on, "but it is not obvious in general. In the case where there are only two finite singular points I have found some remarkable properties of the functions you define, and which I intend to publish. I ask your permission to give them the name of Fuchsian functions." In conclusion, he asked if he might show Fuchs's letter to Hermite.

Fuchs replied on the sixteenth, promising to send him an extract of his forthcoming complete list of the second order differential equations of the kind he was considering. This work, he said, makes any further discussion superfluous. He was very interested in the letters, and very pleased about the name. Of course his replies could be shown to Hermite.

The reply shows once again the important difference of emphasis between the two mathematicians. Fuchs was chiefly interested in studying functions obtained by inverting the integrals of solutions to a differential equation, thus generalizing Jacobi inversion. For him it was only by the way that one might ask that the inverse of the quotient of the solutions be single-valued. This is a requirement that imposes extra conditions. Poincaré was interested in the global nature of the solutions to differential equations, and so it was only the special case that was of interest, and he gradually sought to emancipate it from its Jacobian origins. It is not without irony that we find the young man gently explaining about analytic continuation and the difference between single-valued and unbranched functions, to someone who had consistently studied and applied the technique for fifteen years.

Poincaré's reply of the nineteenth of June clearly demonstrates this difference of emphasis. Taking the condition on the exponents to be what Fuchs had indicated in his letter, Poincaré wrote that he had found that when the differential equation was put in the form $y'' + qy = 0$, then at all the finite singular points the exponent difference was an aliquot part of 1 and not equal to 1, and there were no more than three singular points. If there was only one, z was necessarily a rational function of ζ. If there were two, and the exponent differences were ρ_1, ρ_2, and ρ_3 at infinity, then either $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 > 1$, in which case z is rational in ζ, or $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 1$, in which case z was doubly periodic. Even in this case there were difficulties, as he showed with an example. Finally, if there were three finite singular points, then the exponents would have to be -2 and 0, and at infinity they would be $\frac{3}{2}$ and 2. But although these satisfied Fuchs's criteria, z was not a single-valued function of ζ, so the theorem is wrong. Poincaré therefore proposed to drop the requirement that Fuchs's functions $z_1 + z_2$ and $z_1 \cdot z_2$ be single-valued in u_1 and u_2. He went on to say that this gives a "much greater class of equations than you have studied, but to which your conclusions apply. Unhappily, my objection requires a more profound study, in that I can only treat two singular points." Dropping the conditions on the sum and product functions $z_1 + z_2$ and $z_1 \cdot z_2$ admits the possibility that the exponent differences ρ_1, ρ_2, and ρ_3 satisfy $\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 < 1$. Now z is neither rational nor doubly periodic, but is still single-valued. Poincaré explained, "These functions I call Fuchsian, they solve differential equations with two singular points whenever ρ_1, ρ_2, and ρ_3 are commensurable with each other. Fuchsian functions are very like elliptic functions, they are defined in a certain circle and are meromorphic inside it." On the other hand, he concluded, he knew nothing about what happened when there were more than two singular points.

We do not have Fuchs's reply, but Poincaré wrote to him again on the thirtieth of July to thank him for the table of solutions which, he said "lifts my doubts completely." Or perhaps, not quite completely, for he went on to point out a condition on some of the coefficients of the differential equations which Fuchs had not stated explicitly in the formulation of his theorems. As for his own researches on the new functions, he remarked that they "present the greatest analogy with elliptic functions, and can be represented as the quotient of two infinite series in infinitely many ways. Amongst these series are those which are entire series playing the role of Theta functions. These converge in a certain circle and do not exist outside it, as thus does the Fuchsian function itself. Besides these functions there are others which play the same role as the Zeta functions in the theory of elliptic functions, and by means of which I solve linear differential equations of arbitrary orders with rational coefficients whenever there are only two finite singular points and the roots of the three determinantal equations are commensurable. I have also thought of functions which are to Fuchsian functions as Abelian functions are to elliptic functions, and by means of which I hope to solve all linear equations when the roots of the determinantal equations are commensurable. In the end, functions precisely analogous to Fuchsian functions will give me, I think, the solutions to a great number of differential equations with irrational coefficients."

The correspondence winds down at this point, and Poincaré's last letter (March 20,

1881) merely announces that he will soon publish his research on the Fuchsian functions, which partly resemble elliptic functions and partly modular functions, and on the use of Zetafuchsian functions to solve differential equations with algebraic coefficients. In fact, his first two articles on these matters had by then already appeared in the *Comptes rendus de l'Académie des sciences*.

1.5 The first supplement

Received by the Academy on the twenty-eighth of June, 1880, the first of Poincaré's three supplements is eighty pages in length. It begins by discussing the validity of Fuchs's theorem when there are only two finite singular points, and all the exponent differences are reciprocals of integers, say ρ_1, ρ_2, and r. Poincaré concentrated on the case when $\rho_1 + \rho_2 + r < 1$, to which he had just been led. In this case y maps the complex x-sphere onto a quadrilateral Q, and under analytic continuation Q can be mapped onto a neighboring copy of itself obtained by rotating it through an angle of $\frac{2\pi}{\rho_1}$ about an appropriate vertex. Another copy is obtained by a rotation through $\frac{2\pi}{r}$ about another vertex. Poincaré called these rotations M and N, and observed that the copies of Q obtained by analytic continuation fill out a disc, and that each copy of Q can be reached by a succession of crab-wise rotations (8):

$$M^{L_1} N^{K_1} M^{L_2} N^{K_2} \dots .$$

All these motions preserve the boundary circle, and taken together they form a group (9).

In this connection, Poincaré remarked (14–15):

> There are close connections with the above considerations and the non-Euclidean geometry of Lobachevsky. In fact, what is a geometry? It is the study of the group of operations formed by the displacements to which one can subject a body without deforming it. In Euclidean geometry the group reduces to the rotations and translations. In the pseudogeometry of Lobachevsky it is more complicated.
>
> Indeed, the group of operations formed by means of M and N is isomorphic to a group contained in the pseudogeometric group. To study the group of operations formed by means of M and N is therefore *to do the geometry of Lobachevsky*. Pseudogeometry will consequently provide us with a convenient language for expressing what we will have to say about this group.[2] (Emphasis in the original).

2. "Il existe des liens étroits entre les considérations qui précèdent et la géométrie non-euclidienne de Lobatchewski. Qu'est-ce en effet qu'une Géométrie ? C'est l'étude du groupe d'opérations formé par les déplacements que l'on peut faire subir à une figure sans la déformer. Dans la Géométrie euclidienne ce groupe se réduit à des rotations et à des translations. Dans la pseudogéométrie de Lobatchewski il est plus compliqué. Eh bien, le groupe des opérations combinées à l'aide de M et de N est isomorphe à un groupe contenu dans le groupe pseudogéométrique. Étudier le groupe des opérations combinées à l'aide de M et de N, c'est donc *faire de la géométrie de Lobatchewski*. La pseudogéométrie va par conséquent nous fournir un langage commode pour exprimer ce que nous aurons à dire de ce groupe." Note that *isomorphe* here is used in Jordan's sense to mean what would now be called "monomorphic".

Poincaré proceeded to develop the convenient language of non-Euclidean geometry, defining points, lines, angles, and equality of figures — two figures are equal if one is obtained from another by a non-Euclidean transformation. Since the copies of Q do not overlap, the inverse function $x = x(y)$ is a function "which does not exist outside the circle and which is meromorphic inside this circle."[3] Poincaré continued:

> I propose to call this function a Fuchsian function. ... The Fuchsian function is to the geometry of Lobachevsky what the doubly periodic function is to that of Euclid.[4]

Such functions only illuminate the study of differential equations if they can be defined independently of the equations. This Poincaré proceeded to do by means of the Fuchsian series he introduced. He let H be an arbitrary rational function and K be an arbitrary combination of M's and N's. He let z and ζ denote two variable quantities inside the boundary circle, and introduced the sum

$$\sum H(zK) - H(\zeta K)$$

taken over all distinct operations K (which, as he observed, is not the same as taking all combinations of M's and N's). He showed that the series was convergent by an ingenious argument concerning the non-Euclidean area and Euclidean perimeter of the region composed of copies of Q lying within a non-Euclidean circle of increasing radius. Because the perimeter tends to a finite amount the integral

$$\int \left(\frac{f'(t)}{f(t) - f(z)} - \frac{f'(t)}{f(t) - f(\zeta)} \right) \frac{dt}{t - v}$$

taken along it remains finite, and so Poincaré was able to conclude (30):

> ... if $H(z) = \frac{1}{v-z}$ [and] if the order of the terms is suitable, the series we considered at the start is convergent.[5]

This result was not as strong as Poincaré wanted, and in a note between pages 23 and 24 he remarked:

> I have not been able to deduce the results I wanted from the consideration of Fuchsian series; however, I thought I should mention them because I remain convinced that they will find application in the theory of Fuchsian functions ....[6]

However, Poincaré immediately observed (33) that if $f(z)$ is a Fuchsian function and y_1 and y_2 are two solutions of the differential equation, then $x = f(z)$, $y_1 = (f'(z))^{\frac{1}{2}}$, $y_2 = (f'(z))^{\frac{1}{2}}$ and $f'(z)$ can only vanish at the singular points of the differential equation.

3. "Qui n'existe pas à l'extérieur du cercle ... et qui est méromorphe à l'intérieur de ce cercle."
4. "Je propose d'appeler cette fonction, fonction fuchsienne. ... La fonction fuchsienne est à la géométrie de Lobatchewski ce que la fonction doublement périodique est à celle d'Euclide."
5. "... si $H(z) = \frac{1}{v-z}$, [et] si l'ordre des termes est convenable la série que nous avons considérée au début est convergente."
6. "Je n'ai pu tirer de la considération des séries Fuchsiennes les résultats que j'en attendais; toutefois j'ai cru devoir en parler parce que je reste persuadé qu'on trouvera à appliquer ces séries dans la théorie des fonctions Fuchsiennes ...."

Then he considered equations where the exponent differences were arbitrary rationals: $2K_1\rho_1$, $2K_2\rho_2$, and $2Kr$, where K_1, K_2 and K are integers (43). He took two solutions of the equation to be $F(x)$ and $\Phi(x)$, and defined $\theta_1(\zeta) = F(f(x))$, $\theta_2(\zeta) = \Phi(f(z))$, where f is the Fuchsian function from the preceding case. He called the functions θ_1 and θ_2 Zetafuchsians, remarking (49):

> We shall call them Zetafuchsian functions because they seem to us to be analogous to the Zeta functions one considers in the theory of doubly periodic functions. [7]

(He was to repeat this point in his main paper on Zetafuchsian functions, written in 1884.) He developed them as power series in z and observed (58) that they could be used to solve differential equations with rational exponent differences and two finite singular points. Then (61) he introduced the Thetafuchsian series defined by the series

$$\sum H(zK)\left(\frac{dzK}{dz}\right)^m$$

summed over K, where H is a rational function and K an operation of the group described above. He proved the series converged when $m > 1$ by a very similar argument to the earlier one, and remarked (64):

> I call this series the Thetafuchsian series because of its numerous analogies with the $theta$ functions. [8]

They were of two kinds, one holomorphic in the circle if H has no poles inside the circle, and the other meromorphic when H does have poles inside the circle. Moreover (66):

> The quotient of two Thetafuchsian series (corresponding to the same value of m) is a rational function of the Fuchsian function. [9]

Then Poincaré defined "*Thétazéta*" series, which are to Zetafuchsians what Thetafuchsians are to Fuchsian functions. Finally he summarized the work so far, which had taken him a long way towards the creation of classes of analytic functions that solve many kinds of linear differential equation with algebraic coefficients. Poincaré stressed in particular that the new functions allowed one to integrate the hypergeometric equation whenever the exponent differences are rational and no logarithmic term appears in the solution. (The term "hyper-geometric" was never used by Poincaré in 1880).

He also defended the use of non-Euclidean geometry, although he pointed out that one could eliminate it if one wished. This last remark may well have been intended for Joseph Bertrand, who was on the jury, and whose former belief in the possibility of a demonstration of the parallel postulate was common knowledge, thanks to the Carton affair. This amusing episode, recently described by Pont (see Pont 1986, 637–660), began when Jules Carton, a professor of mathematics at St. Omer, sent Bertrand

7. "Nous les appellerons fonctions zétafuchsiennes parce qu'elles nous semblent présenter quelque analogie avec les fonctions zéta que l'on considère dans la théorie des fonctions doublement périodiques."

8. "Cette série, je l'appelle série thétafuchsienne à cause de ses nombreuses analogies avec les fonctions θ."

9. "Le quotient de deux séries thétafuchsiennes (correspondant à une même valeur de m) est une fonction rationnelle de la fonction fuchsienne."

a proof of the parallel postulate, which Bertrand endorsed when he presented it to the *Académie des sciences* during the meeting of December 20, 1869 (Bertrand 1869). He compounded his error by publishing a short note of his own simplifying Carton's proof (Bertrand 1870). Darboux, Hoüel, and Beltrami, who were just then actively involved in bringing non-Euclidean geometry to France, were appalled, and others were drawn in. The affair reached the newspapers, and finally it was demonstrated publicly not only that Carton's supposed proof was not new (it had been published by an Italian mathematician, Minarelli 1849), but that it was, of course, fallacious. Bertrand withdrew his support, but one may suppose that it was prudent of Poincaré not to insist on the importance of non-Euclidean geometry for his new work.

1.6 The second supplement

Twenty-three pages in length, the second supplement made its way to the Academy on the sixth of September, 1880. With disarming honesty, it begins:

> I fear that my first supplement was lacking in clarity, and believe that it is not pointless, before generalizing the results obtained, to go over these same results again in order to provide some additional explanations. [10]

These further elucidations took the form of an explicit description of the non-Euclidean geometry of the disc, defining point, line, angle, distance between two points (the cross-ratio definition of the projective approach) and area (as a double integral). He then observed that the maps preserving these quantities (and the boundary circle) are precisely the maps of the form

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

and he called them "*mouvements pseudogéométriques*", distinguishing between rotations (which have two real fixed points) and translations (which have none). The choice of the word 'real' (*réel*) was unfortunate; he plainly meant 'point inside or outside the circle' as opposed to points on it, which are at infinity in non-Euclidean geometry.

Then he turned to the differential equations he had studied, and the decomposition of the disc into triangles whose angles are aliquot parts of π. He referred to his two proofs that such a decomposition was possible, the first in the essay itself and the other in the first supplement, as follows:

> The first of these demonstrations would not extend to the more general case that I wish to treat; the second is not rigorous. That is why I think it will be useful to give a third demonstration. [11]

10. "Je crains d'avoir manqué de clarté dans mon premier supplément et je ne crois pas inutile, avant de généraliser les résultats obtenus, devoir revenir sur ces résultats eux-mêmes afin de donner quelques explications supplémentaires."

11. "La première de ces démonstrations ne s'étendrait pas au cas plus général que j'ai l'intention de traiter; la seconde n'est pas rigoureuse. C'est pourquoi je crois utile d'en donner encore une troisième démonstration."

The matter that Poincaré had left obscure consisted of showing that every point inside the fundamental circle does lie in some copy of the quadrilateral Q. He now proved it rigorously by showing explicitly how to cover a path from a given point D to the center O, by a finite number of copies of Q; the finitude derived ultimately from the fact that OD has finite non-Euclidean length (7).

The first novelty in the supplement was the decomposition of the disc into polygons with angles aliquot parts of π. As with the case of triangles, it is necessary to show that the region of the polygons does not contain any overlaps. When there are no overlaps, the corresponding function is single-valued and continuous on the boundary and takes the same value at corresponding points. Poincaré's comment at this point is most interesting when one recalls that "*monogène*" means analytic (15-16):

> There is always a function that satisfies the conditions stated above. This would not be obvious if we had required our function Φ to be monogenic, but we did not do this; in fact, although there are monogenic functions satisfying the stated conditions, as it will be seen later, I have not made this hypothesis because I have no use for it, and because I am not yet in a position to prove the existence of such functions. [12]

This reveals one of the more delightful gaps in Poincaré's education, for it shows that he did not then know the Riemann mapping theorem. This result asserts that any simply-connected domain in the complex plane which is not the whole plane is equivalent, from the standpoint of complex function theory, to the interior of the unit disc.

Then, Poincaré abruptly stated the connection with the theory of quadratic forms (17). He supposed T was a matrix ("$substitution$") with integer coefficients which preserved an indefinite ternary quadratic form Φ, and S a linear substitution sending $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2$ to Φ. Then STS^{-1} maps the quadratic form $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2$ to itself. Suppose that it sends (ξ, η, ζ) to take over (ξ', η', ζ'). The quantities

$$z = \tfrac{\xi}{\zeta} + \sqrt{-1}\tfrac{\eta}{\zeta}, \quad z' = \tfrac{\xi'}{\zeta'} + \sqrt{-1}\tfrac{\eta'}{\zeta'}$$

are related by a transformation $z = \zeta K$ of the non-Euclidean plane for which $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 < 0$. Poincaré remarked (19):

> All the points $z \cdot K$ are the vertices of a polygonal net obtained by decomposing the pseudogeometrical plane into mutually congruent pseudogeometrical polygons. The substitutions K are those that transform the polygons into each other, or even, as we shall see below, those that reproduce the functions that we are going to define. [13]

12. "Il existe toujours une fonction qui satisfait aux conditions énoncées plus haut. Cela ne serait pas évident si nous avions assujetti la fonction Φ à être monogène, mais nous ne l'avons pas fait; en effet bien qu'il existe des fonctions monogènes satisfaisant aux conditions énoncées, ainsi qu'on le verra plus loin, je n'ai pas fait cette hypothèse parce qu'elle m'est inutile, et parce que je ne serais pas encore en état de démontrer l'existence de semblables fonctions."

13. "Tous les points $z \cdot K$ sont les sommets d'un réseau polygonal obtenu en décomposant le plan pseudogéométrique en polygones pseudogéométriquement égaux entre eux. Les substitutions K sont celles qui transforment ces polygones les uns dans les autres, ou bien encore comme on le verra plus loin, celles qui reproduisent les fonctions que nous allons définir."

He gave no proof of these claims, nor indeed that the sheets of the hyperboloid provide a model of non-Euclidean geometry in the z-plane — the proof of the latter fact is quite easy — but proceeded at once to generalize his earlier definition of Thetafuchsian functions. Now a polygonal decomposition $P_0 \ldots P_i \ldots$ is taken to define a group, by saying the transformation K_i maps P_i onto P_0. If $H(z)$ is a rational function then

$$\theta(z) = \sum_i H(zK_i)\left(\frac{dzK_i}{dz}\right)^m$$

defines the new function, for any integer $m > 1$. Convergence was established as before. Poincaré then defined (20) the corresponding Fuchsian functions, $f(z)$, and showed that they took every value including ∞ equally often in the disc, and connected them to differential equations, for $f(z)$ can "serve to integrate a linear differential equation with algebraic coefficients."[14] To show this, he set

$$x = f(z) \quad y_1 = \sqrt{\tfrac{df}{dz}} \quad y_2 = z\sqrt{\tfrac{df}{dz}},$$

and formed the differential equation

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ \dfrac{dy}{dx} & \dfrac{dy_1}{dx} & \dfrac{dy_2}{dx} \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} & \dfrac{d^2y_1}{dx^2} & \dfrac{d^2y_2}{dx^2} \end{vmatrix} = 0$$

It has y_1 and y_2 as solutions, and moreover,

$$y_1\frac{dy_2}{dx} - y_2\frac{dy_1}{dx} = 1,$$

and

$$y_1\frac{d^2y_2}{dx^2} + y_2\frac{d^2y_1}{dx^2} = 0.$$

Indeed it is

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \varphi(x) = 0,$$

where

$$\varphi(x) = \frac{dy_1}{dx}\frac{d^2y_2}{dx^2} - \frac{dy_2}{dx}\frac{d^2y_1}{dx^2}$$

is algebraic as a function of x. Poincaré proved this by showing it was single-valued, invariant under the transformations $z' = zK$; and took only finitely many z-values for each value of $x = f(z)$. In fact, φ is half the Schwarzian derivative of y with respect to x, which Poincaré seems not to have known. Thus Poincaré could conclude this supplement by saying (23):

14. "Servir à intégrer une équation différentielle linéaire à coefficients algébriques" (21).

> To every decomposition of the pseudogeometrical plane into mutually congruent pseudogeometrical polygons there corresponds a function, analogous to the Fuchsian functions, and which enables us to integrate a second-order linear differential equation with algebraic, but irrational, coefficients.
>
> One sees that there are functions, of which the Fuchsian function is only a particular case, which enable us to integrate linear algebraic differential equations. However, in order to determine whether a given equation is integrable in this way, a long discussion would be required which I do not wish to enter into for the moment, but reserve for later. [15]

1.7 The third supplement

A mere twelve pages in length, the third supplement reached the Academy on December 20, 1880. Poincaré dealt here with a class of equations which includes the most famous of all the hypergeometric equations: Legendre's equation for the periods of an elliptic integral as a function of the modulus. For this class of equation the fundamental polygon has one or more vertices on the boundary circle; in Legendre's equation all four vertices are at infinity. When the differential equation has just two finite singular points, Poincaré showed how it can be solved by functions obtained by a limiting argument, assuming the validity of some continuity considerations. He argued (9) that the coefficients of an equation of the form

$$\frac{d^2y}{dx^2} = P_0 y,$$

where P_0 is rational in x and the corresponding quadrilateral is finite, can be varied continuously so that the equation becomes a given one of the same form, and the quadrilateral is continuously deformed into the appropriate infinite quadrilateral.

He had shown in the first (still unpublished) part of the memoir that an equation of the form

$$X_p \frac{d^p y}{dx^p} + X_0 y = 0$$

where the X's are polynomials in x, with highest degree m, can always be reduced to an equation of order m and degree p by means of the substitution $y = \int e^{3x} v dz$ where v is a function of z which satisfies a linear equation of order and degree m. Thus any second order equation with rational coefficients can be reduced to one of the second degree, and so to an equation having only two finite singular points, whence it can be solved. Taken together with the other results in the memoir and the supplements they allowed Poincaré to conclude (12):

15. "A toute décomposition du plan pseudogéométrique en polygones pseudogéométriquement égaux entre eux correspond une fonction analogue aux fonctions fuchsiennes et qui permet d'intégrer une équation linéaire de 2^{d} ordre à coefficients algébriques, mais irrationnels. On voit qu'il y a des fonctions dont la fonction fuchsienne n'est qu'un cas particulier et qui permettent d'intégrer des équations différentielles linéaires algébriques; mais pour déterminer si une équation donnée est intégrable de la sorte, il faudrait une longue discussion que je me réserve d'entreprendre plus tard, mais dans laquelle je ne veux pas entrer pour le moment."

> Besides, I do not doubt that the numerous equations considered by M. Fuchs in his Memoir in volume 71 of *Crelle's Journal* ... provide an infinity of transcendants ... and that these new functions enable us to integrate all linear differential equation with algebraic coefficients. [16]

1.8 Commentary

The three supplements reveal how the discovery of the connection with non-Euclidean geometry enabled Poincaré to advance so rapidly in his research. The discussion in the essay of triangles inside the disc lacks this idea, and is somewhat inconclusive. But the first supplement marks considerable progress in dealing with the general case where the angles of the triangles are $\frac{\pi}{m}$, $\frac{\pi}{n}$, and $\frac{\pi}{p}$ (and $\frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{p} < 1$). This Poincaré achieved in two ways: the idea of considering groups of motions enabled him to organize his ideas and formulate hypotheses; the introduction of metrical concepts allowed him to state and sometimes prove convergence theorems for various new power series that he introduced. Although he was consciously modeling his Fuchsian theory on the theory of elliptic functions, the analogy is a subtle one and had not been noticed before. This may well be due to his novel way of obtaining the series. As is also clear from his published papers, Poincaré obtains Riemann surfaces as quotient spaces of the unit disc, not, as was then the accepted way, as branched coverings of the (Riemann) sphere. So he avoids the complicated question of dissecting a Riemann surface and constructing functions on the dissected surface with assigned jumps across the cuts. However, it should be pointed out that Poincaré does not talk about the quotient space at all at this stage, and there is no hint of the uniformization of algebraic curves.

The date of the first supplement makes it very clear that the realization Poincaré had on boarding the horse-drawn bus at Coutances (see Poincaré 1908, 43–63) was that the "*mixtiligne*" figures in his first essay were conformal versions of non-Euclidean figures. Perhaps he realized that he had shown in the essay how to transform them into the Beltrami-Klein projective figures. It is striking that this realization had escaped Schwarz and Klein for several years. This raises the question of how Poincaré had come to learn of non-Euclidean geometry.

The simple answer, Felix Klein's Erlangen Program (Klein 1872), is surely mistaken. Klein's Erlangen Program defines a geometry as a group acting on a space, and explains that isomorphic group actions give rise to equivalent geometries. Then it seeks to establish that most well-known geometries are special cases of projective geometry, and in particular that non-Euclidean geometry is a geometry whose space is the set of points inside a conic and whose group is the projective transformations mapping the interior of the conic to itself. In papers published at the time Klein showed in more detail how the projective invariant of cross-ratio (which involves four points) can be made to yield a two-point metrical invariant. In the Erlangen Program, however, the

16. "Je ne doute pas d'ailleurs que les nombreuses équations envisagées par M. Fuchs dans son mémoire inséré au Tome 71 du *Journal de Crelle* ... ne fournissent une infinité de transcendantes ... et que ces fonctions nouvelles ne permettent d'intégrer toutes les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques." (The reference should presumably be to Vol. 89 of Crelle's *Journal für die reine und angewandte Mathematik*).

emphasis is strongly projective, and metrical geometry is not much discussed. But in Poincaré's work the emphasis is entirely metrical, and there is no suggestion of a hierarchy of geometries; indeed, Euclidean and non-Euclidean geometries are the only ones invoked. It is true that Poincaré first defines the non-Euclidean metric in the disc in a way that involves cross-ratio, but this arises from the fact that his group elements arose naturally as Möbius transformations. There is none of the richness of context that would indicate a direct influence.

Poincaré does not call his view of geometry the Kleinian one, and he was as scrupulous with attributions as his patchy reading and remarkable imagination would allow. The names he mentions are Beltrami and Hoüel. Moreover, the Erlangen Program was only distributed at Erlangen on the occasion of Klein's appointment as a professor there in 1872, and was not the subject of his inaugural address. It is not cited in the literature of the 1870s, and it is even more unlikely that Poincaré, who was not a voracious reader, would have known of it. It did not become well-known until the early 1890s, when later developments, including Poincaré's own subsequent work and that of Sophus Lie made it seem prescient, and when Klein, as the editor of *Mathematische Annalen*, was able to orchestrate its re-distribution. For all these reasons it is very unlikely that the Erlangen Program is the unacknowledged source of Poincaré's philosophy of geometry.

It is harder to decide if Poincaré had read Klein's essay of 1871, which introduced the non-Euclidean group into the story, but in a projective spirit. In his first letter to Klein, written in 1881, Poincaré wrote: "I know how well you are versed in the knowledge of non-Euclidean geometry, which is the real key to the problem we are dealing with."[17] However, this probably only shows that Poincaré found out about Klein's work when he saw that it was relevant to his own concerns, and in view of the more projective cast of Klein's thought this may well be the case. One should not make too much of Poincaré's cross-ratio definition of non-Euclidean distance. His earliest published papers use a different cross ratio (of z_1, z_2, and their images outside the disc, see Poincaré 1881b, reedited in Darboux et al. 1916, 19–22), and it is probable Poincaré made these observations himself. In any case, Poincaré grasped the new geometry more firmly than Klein ever had.

That leaves us with the question of what, if anything, was the source of Poincaré's views on geometry. One clue is the degree to which group theory enters various contemporary formulations of geometry. In the case of Helmholtz's papers, the answer is not at all. Helmholtz discusses rigid-body motions as the source of our knowledge of geometry, but there is no notice taken of the fact that the motions of bodies may be thought of as the action of a group. The same is true of Beltrami's almost-Euclidean talk of superposition. In Klein's case, the concepts of subgroup and isomorphism are brought in to the story. To go to the other extreme, in Lie's case, there is a much more profound analysis, yielding a classification theorem for at least the low-dimensional geometries.

So it would be in the spirit of the Erlangen Program to describe a group action, indicate the appropriate invariants, and establish an isomorphism. It is not in the spirit to fail to mention groups altogether. It goes beyond the spirit to investigate a group

17. "Je sais combien vous êtes versé dans la connaissance de la géométrie non-Euclidienne qui est la clef véritable du problème qui nous occupe."

in any detail, and well beyond it to seek to analyze all of them. So when in 1880, in the still-unpublished *suppléments* to his essay on linear differential equations, Poincaré simply says that a geometry is a group of operations formed by the displacements of a body that do not deform it, we can see various influences at work. The motion of rigid bodies is an idea vividly presented by both Helmholtz and Beltrami. Even Hoüel in his book on Euclidean geometry wrote in those terms. The conception is more metrical, and narrower than that of Klein.

The sources available to Poincaré included not only work by Hoüel (a friend of Darboux) on Euclidean geometry (Hoüel 1863), but his translations of Beltrami's *Saggio* (Beltrami 1869) and Lobachevsky's *Geometrische Untersuchungen* (Lobachevsky 1866). It is not certain that the work of Helmholtz was known to him, nor is it clear that it would have added anything to what was readily available. With or without Helmholtz's papers, Poincaré could have known from his teachers that geometry is the study of figures in a space that can be moved around rigidly, so that exact superposition is possible and there is a notion of congruence. This idea, which is easier to think through in the metrical than the projective case, works for both Euclidean and non-Euclidean geometry. To anyone aware that thinking group-theoretically is advantageous, it was then natural to observe that the rigid-body motions form a group. This idea could have been had by Jordan, Darboux, Hermite, or Poincaré himself; it could even have been a common-place among the better French mathematicians of the 1870s. There is no need to attribute it to the influence of Klein.

Of these other influences, Beltrami's essay is thoroughly differential-geometric in spirit. It starts from the first fundamental form for a surface of constant negative curvature, and derives formulae for arc length and area on a surface which is represented by the interior of a unit Euclidean disc. In this representation geodesics appear straight (which is why it is sometimes called the Beltrami-Klein projective model, after Klein's re-interpretation of it in 1871), but Beltrami regarded figures as only approximately accurate. He showed that the intrinsic trigonometry of such a surface was that described earlier by Minding and Codazzi, and so the surface carries the non-Euclidean geometry of Lobachevsky. Because Beltrami's presentation is differential-geometric, uses a circular disc, and refers to Lobachevsky but not J. Bolyai or Riemann, it is very likely that this is Poincaré's source. Moreover, Beltrami based the idea of geometry on the exact superposability of figures, which Poincaré also endorsed.

It is clear that geometrical insight always guided his research. First Poincaré dealt with the case where the triangles had angles that were aliquot parts of π, then arbitrary rational parts of π, then, in the final supplement, zero angles. It was more than a convenient language, it underlies the whole appeal to the limiting argument of the third supplement, which is scarcely comprehensible otherwise. It also made possible the connection with the arithmetic of quadratic forms. In this case, as is also clear from the paper he presented to the *Association française pour l'avancement des sciences* in Algiers (Poincaré 1881a, reedited in Châtelet 1950, 267–274), it is a different model of non-Euclidean geometry, one based on the hyperboloid of two sheets. This model is commonly attributed to Weierstrass and Killing, who knew of it in 1872; Poincaré seems to have come to it independently. The second *supplément* enables us to date his realization to the summer of 1880, probably late August or early September, judging by its abrupt appearance towards the end of the piece.

The fact that the new functions could be used to solve differential equations with algebraic coefficients, together with the flexibility of the continuity method, suggest that the new functions are really functions on a Riemann surface and that almost all Riemann surfaces might be obtainable as quotients of the unit disc. Poincaré did not observe this in the supplements, but in two early papers (April 4 and May 30, 1881; Poincaré 1881d, in Châtelet 1950, 8–10 and Poincaré 1881c, reedited in Darboux et al. 1916, 16–18) he said that any two Fuchsian functions corresponding to the same group are algebraically related and that he did not know if an arbitrary algebraic curve could be parameterized by Fuchsian functions. Thus we see that Poincaré's use of infinite polygons to prove the uniformization theorem derives from his interest in differential equations, whereas Klein, who was not interested in differential equations, always preferred finite polygons (cf. Freudenthal 1955, 213; Scholz 1980).

The supplements also make apparent astonishing gaps in Poincaré's education, many of which had to be filled by Klein. He clearly did not know Schwarz's work on the hypergeometric equation (Schwarz 1873, 1890, 211–259), in which the first tessellation of the disc by polygons appears. After Poincaré's work, this tessellation can be seen as a non-Euclidean configuration, but Schwarz had missed making this observation. In June, 1881, Klein began a prolonged correspondence with Poincaré, and a running theme of these letters is the choice of names. Klein was adamant that the appellation Fuchsian was undeserved, and in the sixth letter (June 27, 1881, see Julia & Pétiau 1956, 36) Poincaré admitted that had he known of Schwarz's work, he would have given his new functions a different name, but, as he had already said to Klein, his regard for Fuchs would not now let him change the name. He then went ahead and the same day named a new class of functions 'Kleinian' in the *Comptes rendus* (Poincaré 1881b, reedited in Darboux et al. 1916, 19–22). Klein persisted in his protests against both names, until in letter nineteen (April 4, 1882, Julia & Pétiau 1956, 55) Poincaré decided he had had enough and protested with a citation from Faust, "*Name ist Schall und Rauch*."

It is also clear that Poincaré had never heard of the Riemann mapping principle, which may indirectly be the negative influence of Hermite. He seems to have suspected such a result ought to be true, but the quotation above makes it clear he could not then prove it. On the other hand he was clearly happy with the idea of automorphic functions, those for which $f\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right) = f(z)$, and their fundamental domains. There is a possible source for this: Dedekind's important paper of 1877 on modular functions (Dedekind 1877). The latter paper virtually emancipated modular functions from the theory of elliptic functions, and since this was a theme dear to Hermite's heart, Poincaré may well have learned about it at *Polytechnique*. If so, then, like Klein, he could easily have added ideas of a group-theoretic kind to it. In any event, he recalled Hermite's work on the modular function, which showed that it is automorphic. The third supplement makes it clear that it was the desire to include this famous function satisfying Legendre's hypergeometric equation that led Poincaré to contemplate his continuity method.

1.9 The outcome of the prize competition

The jury, faced with this rush of activity from Poincaré and a more sober memoir from Halphen on differential invariants, along with a number of other essays, opted for sobriety. In awarding Poincaré's essay the second prize, Hermite reported: "…[T]he author successively treated two entirely different questions, of which he made a profound study with a talent by which the commission was greatly struck. The second …concerns the beautiful and important researches of M. Fuchs …The results …presented some lacunæ in certain cases that the author has recognized and drawn attention to in thus completing an extremely interesting analytic theory. This theory has suggested to him the origin of transcendents, including in particular elliptic functions, and has permitted him to obtain the solutions to linear equations of the second order in some very general cases. This is a fertile path that the author has not traversed in its entirety, but which manifests an inventive and profound spirit. The commission can only urge him to follow up his research, in drawing to the attention of the Academy the excellent talent of which they give proof" (see Darboux et al. 1916, 73).

1.10 A note on the text of the supplements

Jeremy Gray found the original manuscripts in December, 1979, when he was finishing his doctoral thesis at the University of Warwick. They were in the *Dossier Henri Poincaré* at the *Académie des sciences* in Paris. (JJG adds: I confess that I was completely surprised; it later turned out that I had missed the announcement in the relevant volumes of the *Comptes rendus de l'Académie*, where receipt of each *supplément* was recorded). He communicated his findings to Professor Jean Dieudonné, who very graciously had copies made which he then sent back to Gray. This copy, and Dieudonné's own form the basis of the essays by Gray (1982) and Dieudonné (1982). The account here draws on Gray (1982, 2000), to which the reader is referred for more details.

Poincaré's original essays are hand-written, of course, but the Academy also possesses a fair typewritten version of the first supplement. Professor Dieudonné conjectured that these transcripts might have been made when the original essay was prepared for publication in the first volume of the *Œuvres de Poincaré*, and then forgotten. Be that as it may, the memory of their existence was lost, although they were as secure as the purloined letter, and they even escaped notice during the events of the Poincaré Centenary in 1955.

1.11 Editorial policy

Our main concern in editing Poincaré's manuscripts was to produce a legible printed copy, accurately reflecting the original text. A handful of spelling errors have been silently corrected, mostly concerning slips in adjectival accords. The capitalization of "*fonctions fuchsiennes*" has been standardized, in occasional contradiction of the manuscript, which treats this in a haphazard fashion. The paragraph structure of our version reflects our sense for the thematic progression of the text, rather than strong, consistent, objective signal in the manuscripts. Poincaré's own corrections have been flagged with footnote calls. All notation reflects that employed by Poincaré, and the original pagination is shown in brackets. Thus in our version of the first supplement, it is clear that the original pagination is neither continuous nor sequential. There are 79 (non-sequentially numbered) pages, including two page 48's, but neither a page 41 nor a page 42.

1.12 Acknowledgment

The three manuscripts submitted by Poincaré for the *Grand Prix des sciences mathématiques* are preserved in the Archives of the Academy of Science in Paris, which generously assented to their publication. The Archives–Centre d'Etudes et de Recherche Henri-Poincaré in Nancy and L. Rollet, in particular, graciously provided assistance to the editors.

Deuxième partie

Henri Poincaré : Trois suppléments sur les fonctions fuchsiennes

Chapitre 1

Concours pour le Prix des Sciences Mathématiques Devise : Non inultus premor (Supplément)

Le théorème de M. Fuchs est-il vrai toutes les fois qu'il n'y a que deux points singuliers et quelles en sont les conséquences, telle est la question qui va nous occuper. [1]

Nous allons envisager dans ce qui va suivre une équation différentielle linéaire de la forme :

$$\frac{1}{y}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{A}{(x-a)^2} + \frac{2C}{(x-a)(x-b)} + \frac{B}{(x-b)^2}$$

Nous appellerons $\varphi(x)$ et $f(x)$ deux intégrales de cette équation, choisies de telle sorte que si α_1 et α_2 sont les racines de l'équation fondamentale relative au point singulier a, on ait ;

$$f(x) = (x-a)^{\alpha_1} f_1(x) \qquad \varphi(x) = (x-a)^{\alpha_2}\varphi_1(x)$$

où f_1 et φ_1 sont holomorphes en x pour $x = a$.

Nous poserons

$$\frac{\varphi\,(x)}{f\,(x)} = z.$$

Nous avons trois points singuliers :

Nous supposerons que a et b sont réels et que ρ_1, ρ_2 et r sont des parties aliquotes de l'unité. Nous allons voir que dans ce cas le théorème de M. Fuchs est vrai. Si a et b étaient imaginaires, on les ramènerait à être réels par un changement de variables très simple.

1. Archives de l'Académie des sciences de Paris, Dossier Poincaré. Le manuscrit s'accompagne d'une enveloppe portant l'annotation : "Séance du 28 Juin 1880. N° 5 Année 1880. Grand prix des Sciences mathématiques. Supplément au mémoire portant pour épigraphe 'Non inultus premor' ".

Joignons a et b par une coupure en ligne droite, puis b à l'infini par une seconde coupure également en ligne droite et dans le prolongement de la précédente. Faisons maintenant varier x dans son plan de telle sorte qu'il ne franchisse aucune de ces coupures et voyons comment variera z.

Faisons décrire à x un contour fermé, défini comme il suit. Ce contour se composera :

1° d'une demi-circonférence $\lambda\mu\pi$ infiniment petite décrite autour du point a de façon à ne pas rencontrer la coupure ;

2° d'une droite $(\mu\nu)$ parallèle à la coupure ab et infiniment voisine de cette coupure ;

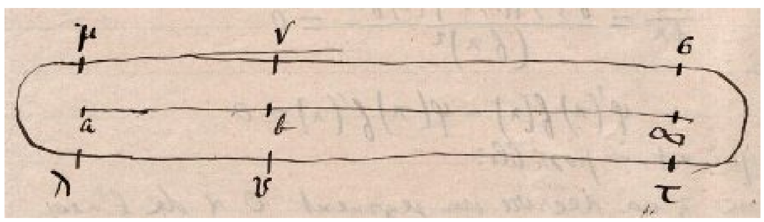
3° d'une droite $\nu\sigma$ parallèle à la coupure $b\infty$ et infiniment voisine de cette coupure ;

4° d'une demi-circonférence $\sigma\tau$ décrite autour du point ∞ et infiniment petite ;

5° d'une droite $\tau\upsilon$ parallèle à ∞b et infiniment voisine de cette coupure ;

6° d'une droite $\upsilon\lambda$ parallèle à ba et infiniment voisine de cette coupure.

La figure suivante représente ce contour, en supposant que par une perspective on ait ramené le point ∞ à distance finie.



Voyons comment, *aux infiniment petits près du premier ordre*, va varier z quand x décrira ce contour.

Quand x variera de μ à ν ; on aura

$$z = (x-a)^{\alpha_2-\alpha_1}\,\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)}$$

$\varphi_1(x)$ et $f_1(x)$ étant ordonnées suivant les puissances croissantes de $x-a$; d'ailleurs on a

$$\varphi_1(a) \gtrless 0, \quad f_1(a) \gtrless 0.$$

On peut poser

$$\frac{\varphi_1(x)}{f_1(x)} = \theta(x),$$

θ étant une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $x-a$.

Les coefficients de l'équation différentielle étant réels, on peut toujours supposer : 1° $\alpha_2 > \alpha_1$; 2° que les coefficients de $\theta(x)$ sont réels.

Quand x variera de μ à ν, z restera donc réel (toujours aux infiniment petits près du 1er ordre). De plus, x variant de μ à ν, z ne pourra passer par un maximum sans quoi l'on aurait :[2]

$$\frac{dz}{dx} = \frac{-f'(x)\,\varphi(x) + \varphi'(x)\,f(x)}{f(x)^2} = 0$$

d'où

$$\varphi'(x)\,f(x) - \varphi(x)\,f'(x) = 0.$$

Ce qui est impossible : *Donc z va décrire un segment Oα de l'axe des quantités réelles.*

Quand x tourne autour du point a, $\theta(x)$ ne change pas ; tandis que $(x-a)^{\alpha_2-\alpha_1}$ se change en

$$(x-a)^{\rho_1}\,e^{2i\pi\rho_1}.$$

Le module de z ne change donc pas, pendant que son argument augmente de $2\pi\rho_1$; *Donc quand x variera de λ à ν, z va décrire un segment de droite Oα′ égal en longueur à Oα et faisant avec Oα un angle* $2\pi\rho_1$.

Dans le voisinage de $x = b$, il existe toujours deux nombres réels[3] α, β tels que

$$\varphi(x) - \alpha f(x) = (x-b)^{\beta 1}\varphi_2(x),$$
$$\varphi(x) - \beta f(x) = (x-b)^{\beta 2}\varphi_2(x),$$

$\varphi_2(x)$ et $f_2(x)$ étant holomorphes en x ; on a alors

$$\frac{z-\alpha}{z-\beta} = \frac{\varphi(x)-\alpha f(x)}{\varphi(x)-\beta f(x)} = (x-b)^{\rho_2}\,\theta_2(x),$$

$\theta_2(x)$ étant holomorphe en x. Vu la réalité des coefficients de l'équation différentielle et de ceux de $f_1(x)$, $\varphi_1(x)$, $\theta(x)$, les coefficients de $\rho_2(x)$ sont réels ; de sorte que cette fonction θ_2 reste réelle quand x varie de μ à σ.

Supposons pour fixer les idées $a > b$, $(x-b)^{\rho_2}$ et par conséquent

$$\frac{z-\alpha}{z-\beta},$$

est réel quand x varie de μ à ν ; au contraire *quand x varie de ν à σ*, l'argument de $(x-b)^{\rho_2}$ devient $\pi\rho_2$. Donc

$$\nu < x < \sigma, \qquad \text{arg.}\frac{z-\alpha}{z-\beta} = \pi\rho_2.$$

C'est dire que *z décrira un arc $\alpha\gamma$ du cercle qui passe par les points* α, β et qui coupe la droite *$O\alpha\beta$ sous un angle* $\pi\rho_2$.

Dans le voisinage de $x = \infty$, on peut encore trouver deux nombres γ, δ tels que

$$\frac{z-\gamma}{z-\delta} = x^{-r}\theta_3(x),$$

2. Le manuscrit indique : "$dz/dx = (\quad)/(fx)^2 = 0$" ; nous insérons le numérateur.

3. Note marginale : "En effet, ~~α qui est l'extrémité~~ comme les coefficients de l'équation différentielle sont réels, α et β ne peuvent être que réels ou imaginaires conjugués. Or α qui est l'extrémité du segment $O\alpha$ est évidemment réel."

θ_3 étant holomorphe en $\frac{1}{x}$ pour $x = \infty$.

On le démontrerait par la méthode qui a permis de voir que dans le voisinage de $x = b$, on a :

$$\frac{z-\alpha}{z-\beta} = (x-b)^{\rho_2}\, \theta_2\,(x)\,.$$

Donc quand x décrit un contour autour de $x = \infty$, le module $\frac{z-\gamma}{z-\delta}$ ne change pas pendant que son argument augmente de $2\pi r$.

Or quand x décrivait $\nu\sigma$, z décrivait l'arc de cercle $\alpha\gamma$; donc quand x décrira $\tau\nu$, z décrira un arc $\gamma\alpha'$ du cercle qui passe par γ et δ, et coupe le cercle $\alpha\gamma\beta$ suivant un angle $2\pi r$.

Ce même cercle devra couper la droite $O\alpha'$ sous un angle $\pi\rho_2$; il devra couper cette droite en deux points α', β', tels que

$$O\alpha' = O\alpha \quad O\beta' = O\beta.$$

Il en résulte que les points $O\gamma\delta$ sont sur une même ligne droite d'argument $\pi\rho_1$.

$$\begin{aligned} \text{angle } \alpha O\alpha' &= 2\pi\rho_1 \\ \text{angle mixtiligne } O\alpha\gamma &= \pi\rho_2 \\ \text{angle mixtiligne } O\alpha'\gamma &= \pi\rho_2 \\ \alpha\gamma\alpha' &= 2\pi\rho \\ \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{\cos\pi r - \cos\pi\,(\rho_1+\rho_2)}{\cos\pi r + \cos\pi\,(\rho_1-\rho_2)} \end{aligned}$$

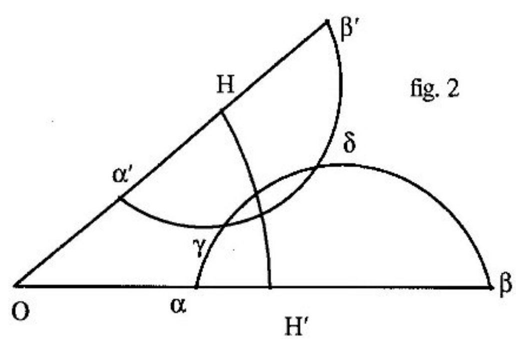


fig. 2

Quand x décrit le contour $\lambda\mu\nu\sigma\tau\upsilon\lambda$, z décrit le contour $O\alpha\gamma\alpha'$.

Quand x parcourra tout son plan sans franchir aucune coupure, z devra parcourir une certaine région *tout d'une pièce* qui ne pourra être que la région située à l'intérieur du quadrilatère $O\alpha\gamma\alpha' O$.

Opérations qui ne changent pas x.

Supposons que x partant d'une certaine valeur initiale, arrive par un chemin quelconque à une certaine valeur finale sans avoir franchi aucune coupure, z prendra une certaine valeur située à l'intérieur du quadrilatère mixtiligne $O\alpha\gamma\alpha'$ et ne dépendant que de la valeur finale de x, nous la désignerons par la notation

$$z = F(x).$$

Si x était arrivé à cette valeur finale, en franchissant K fois la première coupure *ab*, nous désignerions la valeur de z par la notation

$$F(x, 1^K),$$

si x était arrivé à cette valeur après avoir franchi K fois la première coupure *ab*, puis L fois, la seconde coupure $b\infty$, puis K_1 fois, la première coupure *ab*, puis L_1 fois la seconde coupure, nous désignerions la valeur de z par la notation

$$F\left(x, 1^K 2^L 1^{K_1} 2^{L_1}\right),$$

etc.

Soit M l'opération qui consiste à changer z en $ze^{2i\pi\rho_1}$, N celle qui consiste à changer

$$\frac{z-\gamma}{z-\delta} \text{ en } \frac{\text{z-}\gamma}{\text{z-}\delta}\, e^{2\text{l}\pi\text{r}}$$

on aura :

$$\begin{aligned}
F(x, 1) &= F(x)M \\
F(x, 2) &= F(x)N \\
F\left(x, 1^{K+1} 2^L 1^{K_1}\right) &= F\left(x, 1^K 2^L 1^{K_1}\right) M \\
F\left(x, 2\, 1^K 2^L 1^{K_1}\right) &= F\left(x, 1^K 2^L 1^{K_1}\right) N \\
F\left(x, 1^K 2^L 1^{K_1} 2^{L_1}\right) &= F(x) N^{L_1} M^{K_1} N^L M^K
\end{aligned}$$

L'opération $N^{L_1} M^{K_1} N^L M^K$ s'appellera une opération composée à l'aide de M et de N.

Quand x parcourra tout son plan en franchissant les coupures d'une façon quelconque, z restera donc dans le quadrilatère $O\alpha\gamma\alpha'$ ou dans un des transformés de ce quadrilatère par l'une des opérations composées à l'aide de M et de N.

Or toutes ces opérations reproduisent le cercle HH' qui a O pour centre et qui coupe orthogonalement les cercles $\alpha\delta\beta$ et $\alpha'\gamma\delta_x\beta'$. Le quadrilatère $O\alpha\gamma\alpha'$ tant intérieur à ce cercle, tous ses transformés seront également intérieurs à ce cercle. Donc z restera toujours à l'intérieur de ce cercle.

Les opérations composées à l'aide de M et de N forment un *groupe* ; ce sont les opérations qui appliquées à z, ne changent pas x ; elles consistent toutes à changer z en

$$\frac{Az + B}{A'z + B'}$$

où A, B, A', B' sont des constantes.

Désignons par Q le quadrilatère $O\alpha\gamma\alpha'$; par

$$QM^K N^L M^{K_1},$$

le transformé de ce quadrilatère par l'opération

$$M^K N^L M^{K_1}.$$

Le quadrilatère $QM^K N^L M^{K_1}$ aura un côté commun avec le quadrilatère

$$QM^{K+1} N^L M^{K_1},$$

et avec le quadrilatère

$$QNM^K N^L M^{K_1}.$$

Le quadrilatère Q et ses transformés successifs vont donc former une sorte de damier, qui recouvrira la surface du cercle HH' (soit une fois, soit plusieurs fois, nous ne le savons pas encore).

Tous les transformés successifs du cercle $O\alpha\gamma\alpha'$ sont des cercles qui coupent orthogonalement HH' ; de plus les opérations M et N conservent les angles. Donc les transformés successifs de Q auront les mêmes angles que Q et auront pour côtés des arcs de cercles coupant orthogonalement le cercle HH'.

Réciproquement, tout quadrilatère curviligne dont les côtés sont formés par des arcs de cercle coupant orthogonalement HH', dont les angles sont égaux à ceux de Q ; et dont un côté coïncide avec un côté d'un des transformés de Q est aussi un des transformés de Q (si ces deux côtés coïncident de façon que les sommets correspondant à des angles égaux coïncident).

En effet, soit un quadrilatère curviligne satisfaisant à ces conditions et dont un côté $\lambda\mu$ coïncide avec un côté du quadrilatère

$$QM^K N^L M^{K_1}.$$

Supposons que les angles des deux quadrilatères en λ soient égaux à $2\pi\rho_1$ et les angles en μ à $\pi\rho_2$. Alors le quadrilatère coïncidera avec le quadrilatère :

$$QM^{K+1} N^L M^{K_1}.$$

Donc si l'on faisait voir que l'on peut décomposer la surface du cercle HH' en un nombre fini ou en une infinité de quadrilatères ayant pour côtés des arcs de cercle coupant orthogonalement HH' et dont les angles sont égaux à ceux de Q et que l'un de ces quadrilatères fût précisément Q, l'on aurait démontré que le damier formé par les transformés successifs de Q ne recouvre qu'une fois le cercle HH' et par conséquent que x est monodrome en z dans l'intérieur de ce cercle.

Cas exceptionnels.

Dans la figure 2 on a supposé implicitement que $\frac{\alpha}{\beta}$ était positif. Mais dans certains cas exceptionnels, il peut arriver que

$$\frac{\alpha}{\beta} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\alpha}{\beta} < 0.$$

On aura

$$\frac{\alpha}{\beta} < 0$$

toutes les fois que

$$\rho_1 + \rho_2 + r > 1$$

ce qui peut arriver :

1° Si $\rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{2}$; nous avons montré que dans ce cas l'équation était intégrable algébriquement (*voir* Note 8).

2° Si

$$\rho_1 = \tfrac{1}{2}, \quad r = \tfrac{1}{3}, \quad \rho_2 = \tfrac{1}{3} \text{ (A)},$$

ou

$$\rho_1 = \tfrac{1}{2}, \quad r = \tfrac{1}{3}, \quad \rho_2 = \tfrac{1}{3} \text{ (B)},$$

ou

$$\rho_1 = \tfrac{1}{2}, \quad r = \tfrac{1}{3}, \quad \rho_2 = \tfrac{1}{5} \text{ (C)}.$$

Dans ce cas le cercle HH' est imaginaire et le damier formé par les transformés de Q peut remplir tout le plan. La puissance de l'origine O par rapport aux différents cercles qui sont les transformés successifs de $\alpha\gamma\delta\beta$ est constante. Si donc on projette tous les points du plan, stéréographiquement sur une sphère de rayon convenable, tangente au plan du tableau en O ; tous ces cercles vont se projeter suivant des grands cercles de la sphère.

Comme ici le quadrilatère Q et ses transformés successifs se réduisent à des triangles, ils se projetteront sur la sphère suivant des triangles sphériques T. Comme la projection stéréographique conserve les angles, ces triangles seront isocèles et auront pour angles :

120° et 60° dans l'hypothèse	A,
120° et 45°	B,
120° et 36°	C.

Ces triangles seront donc tous égaux.

Se demander si le damier des transformés de Q recouvre tout le plan, et une seule fois, c'est se demander si le damier des triangles T recouvre toute la sphère et *une seule fois* ; c'est-à-dire si l'on peut décomposer la sphère en triangles égaux à T. Or cela est évident ; car cette décomposition peut être obtenue aisément

dans l'hypothèse A à l'aide du tétraèdre régulier
dans l'hypothèse B à l'aide du cube et de l'octaèdre régulier
dans l'hypothèse C à l'aide du dodécaèdre et de l'icosaèdre.

Donc il n'y a qu'un nombre fini de transformés de Q qui recouvrent tout le plan et une seule fois. Donc x est rationnel en z et l'équation est intégrale algébriquement.

Il peut arriver aussi que

$$\frac{\alpha}{\beta} = 0.$$

Pour cela il faut :

$$\rho_1 + \rho_2 + r = 1,$$

ce qui peut arriver si

$$\begin{array}{lll} \rho_1 = \frac{1}{2}, & \rho_2 = \frac{1}{3}, & r = \frac{1}{6}, \\ \rho_1 = \frac{1}{2}, & \rho_2 = \frac{1}{4}, & r = \frac{1}{4}, \\ \rho_1 = \frac{1}{3}, & \rho_2 = \frac{1}{3}, & r = \frac{1}{3}. \end{array}$$

Dans ce cas le cercle HH' est de rayon infini, le cercle $\alpha\gamma\delta\beta$ et ses transformés se réduisent à des droites ; le quadrilatère Q et ses transformés peuvent s'associer de façon à former un réseau de losanges, x est fonction doublement périodique de z, quant à l'équation différentielle, elle admet une intégrale algébrique de la forme,

$$(x-a)^\alpha \quad (\text{x-b})^\beta$$

et une autre que l'on peut obtenir par quadratures.

Rapports de la théorie précédente avec la Pseudogéométrie.

Il existe des liens étroits entre les considérations qui précèdent et la géométrie non-euclidienne de Lobatchewski. Qu'est-ce en effet qu'une Géométrie ? C'est l'étude du *groupe d'opérations* formé par les déplacements que l'on peut faire subir à une figure sans la déformer. Dans la Géométrie euclidienne ce groupe se réduit à des *rotations* et à des *translations*. Dans la pseudogéométrie de Lobatchewski il est plus compliqué.

Eh bien, le *groupe* des opérations combinées à l'aide de M et de N est *isomorphe* à un groupe *contenu* dans le groupe pseudogéométrique. Étudier le groupe des opérations combinées à l'aide de M et de N, c'est donc *faire de la géométrie de Lobatchewski*. La pseudogéométrie va par conséquent nous fournir un *langage commode* pour exprimer ce que nous aurons à dire de ce groupe.

Soit h le rayon du cercle HH', au point du plan des z dont les coordonnées polaires sont ρ et ω je vais faire correspondre dans *plan pseudogéométrique*, un point dont les coordonnées polaires seront :

$$\omega \quad \text{et} \quad L\frac{\text{h+}\rho}{\text{h-}\rho} = R.$$

Aux points situés à l'intérieur du cercle HH' correspondront des points remplissant tout le plan pseudogéométrique. Aux cercles qui coupent orthogonalement le cercle HH' correspondront des droites ; aux cercles qui coupent orthogonalement tous les cercles qui passent par un point λ du plan des z et qui coupent eux-mêmes à angle droit le cercle HH' correspondront des cercles ayant pour centre le point correspondant à λ. Enfin l'angle de deux courbes dans le plan des z sera égal à l'angle des deux courbes correspondantes dans le plan pseudogéométrique.

Que deviennent alors les opérations M et N ? Si nous continuons à appeler M l'opération qui permet de passer du point correspondant à λ au point correspondant à

λM, M n'est autre chose qu'une rotation d'angle $2\pi\rho_1$ autour de l'origine. N n'est de même qu'une rotation d'angle $2\pi r$ autour du point correspondant à α.

Continuons à appeler Q le quadrilatère rectiligne qui dans le plan pseudogéométrique correspond au quadrilatère curviligne Q du plan des z. *Dans le plan pseudogéométrique, le quadrilatère* Q *et ses transformés successifs sont tous égaux entre eux.*

Se demander si le damier formé dans le plan des z par le quadrilatère Q et ses transformés recouvre la surface de HH' et la recouvre une seule fois ; c'est se demander si le damier formé dans le plan pseudogéométrique par le quadrilatère Q et ses transformés recouvre ce plan tout entier et ne le recouvre qu'une fois ; c'est se demander si ce plan peut être décomposé en une infinité de quadrilatères égaux à Q, ou ce qui revient au même en une infinité de triangles ayant pour angle $\pi\rho_1$, $\pi\rho_2$ et πr.

Or je dis que cela est possible. En effet, soit :

$$\rho_1 = \frac{1}{n_1}, \quad \rho_2 = \frac{1}{n_2}, \quad r = \frac{1}{p},$$

on pourra toujours tracer dans le plan une figure formée d'autant de triangles qu'on voudra, et de telle sorte que si l'on désigne certains des sommets de ces triangles par la lettre A, d'autres par la lettre B, d'autres par le lettre C.

1° Chaque triangle ait un sommet A, un sommet B et un sommet C.

2° Tous les sommets A qui ne sont pas sur le périmètre de la figure appartiennent à $2n_1$ triangles différents.

3° Tous les sommets B qui ne sont pas sur le périmètre appartiennent à $2n_2$ triangles différents.

4° Tous les sommets C qui ne sont pas sur le périmètre appartiennent à $2p$ triangles différents.

Comme nous n'avons fait aucune hypothèse sur les dimensions des triangles, et comme les conditions qui précèdent sont purement qualitatives, elles pourront toujours être remplies.

Proposons-nous maintenant le problème de *trigonométrie pseudogéométrique* qui consiste à *résoudre* ce système de triangles, en supposant que tous les angles en A sont égaux à $\pi\rho_1$, tous les angles en B égaux à $\pi\rho_2$, tous les angles en C égaux à πr. Ces conditions sont en nombre surabondant, mais nous allons voir qu'elles sont compatibles.

En effet, remarquons en premier lieu que ces conditions nous donnent 2π pour la somme des angles en un sommet A, ou en un sommet C, ou en un sommet C qui n'est pas sur le périmètre de la figure. Car cette somme est égale à

$$\begin{aligned} 2n_1 \times \pi\rho_1 &= 2\pi, \\ 2n_2 \times \pi\rho_2 &= 2\pi, \\ 2p \times xr &= 2\pi. \end{aligned}$$

Il n'y a donc pas de difficulté de ce côté. Résolvons maintenant un des triangles ; cette résolution sera possible puisque

$$\begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 + r &< 1, \\ \pi\rho_1 + \pi\rho_2 + \pi r &< \pi. \end{aligned}$$

Une fois ce triangle résolu, on passera au triangle adjacent ; de ce triangle nouveau on connaîtra quatre éléments, à savoir les trois angles A, B, C et un côté AB par exemple.

Ces conditions sont surabondantes, mais elles sont compatibles, car ces éléments sont égaux aux éléments homologues, du triangle précédemment résolu.

On résoudra de même tous les autres triangles, et on reconnaîtra que tous ces triangles ont pour angles $\pi\rho_1$, $\pi\rho_2$, et πr, c'est-à-dire qu'il sont égaux à $\frac{1}{2}Q$. Donc on peut tracer dans le plan pseudogéométrique une figure formée *d'un nombre aussi grand que l'on voudra* de triangles égaux à $\frac{1}{2}Q$, et sans qu'il y ait duplicature. Donc le plan pseudogéométrique est décomposable en une infinité de triangles égaux à $\frac{1}{2}Q$ ou de quadrilatères égaux à Q.

Donc la surface du cercle HH' est décomposable en une infinité de quadrilatères curvilignes qui ne sont autre chose que les transformés successifs de Q. Donc le damier de ces transformés recouvre tout ce cercle et ne le recouvre qu'une fois. Donc un point quelconque situé à l'intérieur de HH' n'appartient qu'à un seul de ces quadrilatères. *Donc* x *reste fonction monodrome de* z *à l'intérieur de ce cercle.*

Résumé.

Si

$$\rho_1 + \rho_2 + r > 1,$$

x est fonction rationnelle de z.

Si

$$\rho_1 + \rho_2 + r = 1,$$

x est fonction doublement périodique de z.

Si

$$\rho_1 + \rho_2 + r < 1,$$

x est une fonction de z qui n'existe pas à l'extérieur du cercle HH' et qui est méromorphe à l'intérieur de ce cercle.

Je propose d'appeler cette fonction, *fonction fuchsienne*. Remarquons que la fonction fuchsienne ne peut prendre qu'une seule fois la même valeur à l'intérieur de chacun des quadrilatères transformés de Q.

La fonction fuchsienne est à la géométrie de Lobatchewski ce que la fonction doublement périodique est à celle d'Euclide.

En effet pour obtenir une fonction doublement périodique, on décompose le plan en parallélogrammes égaux et l'on cherche une fonction qui reprenne la même valeur aux points correspondants de ces parallélogrammes égaux.

De même pour obtenir une fonction fuchsienne, on décompose le plan pseudogéométrique en quadrilatères égaux et l'on cherche une fonction qui reprenne la même valeur aux points correspondants de ces quadrilatères égaux.

La géométrie *opposée* à celle de Lobatchewski, est comme on sait la géométrie de Riemann, qui si on se restreint à deux dimensions, n'est autre chose que la géométrie sphérique.

Eh bien, existe-t-il des fonctions qui soient à la géométrie de Riemann, ce que la fonction doublement périodique est à celle d'Euclide et la fonction fuchsienne à celle de Lobatchewski ? En d'autres termes peut-on décomposer la sphère en polygones égaux entre eux et trouver une fonction qui reprenne la même valeur aux points correspondants de ces polygones.

Évidemment oui, et c'est ce que nous avons fait en étudiant les cas où

$$\rho_1 + \rho_2 + r > 1.$$

Mais dans ces cas, comme la surface de la sphère est finie, elle se décompose en un nombre fini de polygones, égaux entre eux et par conséquent la fonction définie à l'aide de cette décomposition est rationnelle.

Séries fuchsiennes.

Nous allons définir maintenant des séries qui joueront par rapport à la fonction fuchsienne le même rôle que jouent par rapport aux fonctions doublement périodiques les séries par lesquelles on a coutume de les représenter.

Pour rendre la définition qui va suivre plus claire et plus précise, commençons par faire une remarque. Deux opérations combinées à l'aide de M et de N

$$\begin{gathered} M^K N^L M^{K_1} N^{L_1} \\ M^{K'} N^{L'} M^{K'_1} N^{L'_1} \end{gathered}$$

peuvent être identiques sans que l'on ait

$$K = K', \quad L = L', \quad K_1 = K'_1, \quad L_1 = L'_1$$

Par exemple si

$$\rho_1 = \frac{1}{n_1}$$

M^{n_1+1} est identique à M.

A chaque opération, correspond un quadrilatère transformé de Q ; à chaque quadrilatère correspondront plusieurs opérations, mais toutes ces opérations seront *identiques.*

Cela posé, soit H une fonction rationnelle quelconque, K une opération combinée à l'aide de M et de N, z et ζ deux quantités variables, zK, et ζK les résultats de l'opération K appliquée à z et à ζ.

Envisageons la série

$$\sum [H(zK) - H(\zeta K)].$$

Sous le signe Σ, je prends successivement pour K *toutes* les opérations combinées à l'aide de M et de N en ayant soin *de ne pas prendre plusieurs fois des opérations identiques*, c'est-à-dire de rejeter les opérations K qui seraient identiques à une opération déjà obtenue.

À chaque terme de la série correspondra un système d'opérations K identiques entre elles et, un seul, et réciproquement.

À chaque terme de la série, correspondra un quadrilatère transformé de Q et un seul et réciproquement.

Je dis que la série est convergente, si l'ordre des termes est convenable. [4]

Je n'ai pu tirer de la considération des séries fuchsiennes les résultats que j'en attendais ; toutefois j'ai cru devoir en parler parce que je reste persuadé qu'on trouvera à appliquer ces séries dans la théorie des fonctions fuchsiennes ; je prie particulièrement de vouloir bien lire la partie qui est encadrée de noir et qui trouve des applications dans la suite.

4. Variante : "…convergente, et ~~cela quel que soit l'ordre des termes~~".

J'appelle en effet S_R la somme des termes de la série (nombre fini) qui correspondent aux quadrilatères transformés de Q qui ont quelque sommet à l'intérieur d'un cercle décrit dans le plan pseudogéométrique de l'origine comme centre avec R pour rayon.
Je dis que quand R tend vers l'infini, S_R tend vers une limite finie.
Soit en effet P_R le polygone formé par tous les quadrilatères transformés de Q qui ont quelque sommet à l'intérieur du cercle dont nous venons de parler.
Soit P'_R le polygone curviligne correspondant dans le plan *géométrique* des z.
Je dis que le périmètre du polygone P'_R reste fini quand R tend vers l'infini.
Soit ρ le rayon du cercle *géométrique* qui correspond au cercle *pseudogéométrique* de rayon R de telle sorte :

$$R = L\frac{h+\rho}{h-\rho}, \quad \frac{dR}{d\rho} = \frac{2h}{h^2-\rho^2}.$$

Soit Σ la surface pseudogéométrique du quadrilatère Q, L la longueur pseudogéométrique de sa plus grande diagonale ou de son plus grand côté, si celui-ci est plus grand que la plus grande diagonale. La longueur pseudogéométrique de l'arc de cercle infiniment petit dont l'angle au centre est $d\omega$ et le rayon R nous sera donnée par la proportion :

$$\frac{ds}{dR} = \frac{\rho d\omega}{d\rho}$$

car les figures *infiniment petites* correspondantes sont semblables dans le plan géométrique et dans le plan pseudogéométrique.
Donc

$$ds = d\omega\rho\frac{dR}{d\rho} = d\omega\frac{2h\rho}{h^2-\rho^2}.$$

la longueur totale du cercle est alors

$$4\pi\frac{h\rho}{h^2-\rho^2}$$

ou puisque

$$\rho = h\frac{e^R-1}{e^R+1}$$

cette longueur du cercle de rayon R sera : [5]

$$\pi\frac{e^{2R}-1}{e^R} = \pi e^R - \pi e^{-R}.$$

La surface du cercle de rayon R (en pseudogéométrie) sera alors :

$$\int_0^R \left(\pi e^R - \pi e^{-R}\right) dR = \pi e^R + \pi e^{-R} - 2r.$$

5. Variante : dans le terme de gauche, nous lisons "$4\pi e^{2R} - 1/e^R$".

Cela posé, cherchons :
1° Le maximum et le minimum du nombre des quadrilatères transformés de Q qui peuvent être situés tout entiers à l'intérieur du cercle de rayon R.
Il est clair que si ce nombre est égal à N ; le polygone formé par ces quadrilatères aura pour surface pseudogéométrique

$$N \cdot \Sigma.$$

Or le périmètre de ce polygone sera tout entier intérieur au cercle de rayon R et tout entier extérieur au cercle de rayon $R - L$ (car tous les sommets du contour de ce polygone appartiennent à un quadrilatère ayant un sommet à l'extérieur du cercle de rayon R).
Donc on a

$$\pi\rho^r + \pi e^{-R} - 2\pi > N \cdot \Sigma > \pi e^{R-L} + \pi e^{-R+L} - 2\pi,$$

ce qui donne deux limites du nombre N.
2° Cherchons maintenant une limite du nombre des côtés du polygone P_R.
Le contour de ce polygone est formé par des côtés appartenant à des quadrilatères tout entiers intérieurs au cercle de rayon $R + L$ et qui ne sont pas tout entiers intérieurs au cercle de rayon R.
Le nombre de ces quadrilatères ne peut être plus grand que le *maximum* du nombre des quadrilatères tout entiers intérieurs au cercle de rayon $R + L$ diminué du *minimum* du nombre des quadrilatères tout entiers intérieurs au cercle de rayon R.
Le maximum de ce nombre est donc

$$\frac{1}{\Sigma} 3\pi \left(e^{R+L} - e^{R-L} + e^{-R-L} - e^{-R+L}\right),$$

et le maximum du nombre des côtés du polygone P_R et par conséquent du polygone P'_R est alors :

$$\frac{1}{\Sigma} 3\pi \left(e^{R+L} - e^{R-L} + e^{-R-L} + e^{-R+L}\right);$$

3° Cherchons le maximum de la longueur de l'un des côtés du polygone P'_R.
La longueur pseudogéométrique des côtés du polygone P_R est plus petite que L. De plus tous ces côtés sont tout entiers extérieurs au cercle de rayon $R - L$. Or la plus grande longueur géométrique que puisse prendre l'arc de cercle auquel correspond dans le plan pseudogéométrique un segment de droite de longueur L et tout entier extérieur au cercle de rayon R est :

$$\frac{L}{2h}\left(h^2 - \rho^2\right) = hL \frac{2e^R}{\left(e^R + 1\right)^2}.$$

Le maximum du côté du polygone P'_R est donc

$$2hL \frac{e^{R-L}}{\left(e^{R-L} + 1\right)^2}.$$

Le maximum du périmètre du polygone P'_R est donc :

$$\frac{6hL\pi}{\Sigma} \qquad \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{R}} - e^{2R-2L} + e^{-2L} - 1}{\left(e^{R-L} + 1\right)^2}$$

et la limite de cette expression pour $R=\infty$ est :

$$\frac{6hL\pi}{\Sigma}\left(e^{2L}-1\right).$$

Donc le périmètre de P'_R reste fini quand R tend vers l'infini.

Cela posé, prenons l'intégrale

$$I_R=\int\left(\frac{f'(t)}{f(t)-f(z)}-\frac{f'(t)}{f(t)-f(\zeta)}\right)\frac{dt}{t-v}$$

le long du périmètre de P'_R.

Dans cette intégrale $f(z)$ représente la fonction fuchsienne de z.

Intégrons par parties, il vient

$$I_R=\frac{1}{t-v}L\frac{f(t)-f(z)}{f(t)-f(\zeta)}+\int L\frac{f(t)-f(z)}{f(t)-f(\zeta)}\frac{dt}{(t-v)^2}.$$

Étudions comment varie la fonction :

$$L\frac{f(t)-f(z)}{f(t)-f(\zeta)}$$

quand la variable t décrit le polygone P'_R.

Rappelons que la fonction fuchsienne $f(t)$ n'est autre chose que x quand la variable t décrit un des côtés d'un des quadrilatères transformés de Q, x décrit l'une des coupures qui joignent les points singuliers a, b, ∞ ; donc quand t décrit le polygone P'_R, x revient à la même valeur après être resté constamment sur la ligne droite $ab\infty$.

Donc

$$L\frac{f(t)-f(z)}{f(t)-f(\zeta)}=L\frac{x-f(z)}{x-f(\zeta)}$$

revient à la même valeur. Donc dans l'expression de I_R le terme tout intégré qui a la même valeur aux deux limites est nul, de sorte qu'on a

$$I_R=\int L\frac{f(t)-f(z)}{f(t)-f(\zeta)}\,\frac{\mathrm{dt}}{(t-v)^2}.$$

[6]

6. À cet endroit du manuscrit paraît une section barrée par Poincaré, que nous transcrivons intégralement. Intégrons une fois de plus par parties, en remarquant que :

$$\int f'(t)L\frac{f(t)-f(z)}{f(t)-f(\zeta)}=[f(t)-f(z)]\,[L(ft-fz)-1]\,[f(t)-f(\zeta)]\,[L(ft-f\zeta)-1]=\varphi(t).$$

Il viendra :

$$I_R=\frac{\varphi(t)}{(t-v)^2f'(t)}-\int\varphi(t)\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{(t-v)^2f'(t)}\right]dt.$$

Quand R tend vers l'infini, le périmètre d'intégration reste fini, la fonction sous le signe $\int$ reste finie (car comme nous l'avons vu plus haut la fonction :

$$L\frac{f(t)-f(z)}{f(t)-f(\xi)}$$

a ici une valeur parfaitement déterminée). Donc I_R reste finie.

$$\text{Limite } I_R <> \infty.$$

Mais l'intégrale I_R est égale d'autre part à $2i\pi$ multiplié par la somme des résidus de la fonction

$$\left[\frac{f'(t)}{f(t)-f(z)}-\frac{f'(t)}{f(t)-f(\zeta)}\right]\frac{1}{t-v}$$

correspondant aux pôles de cette fonction situés à l'intérieur du périmètre d'intégration.

Or si z et ζ sont tous deux à l'intérieur du *quadrilatère* Q ; ces pôles sont :

$$t=v \qquad t=zK \qquad t=\zeta K$$

où K représente une quelconque des opérations telles que le quadrilatère QK soit l'un de ceux dont l'ensemble forme le polygone P'_R.

La somme des résidus correspondants est alors :

$$\frac{f'(v)}{f(v)-f(z)}-\frac{f'(v)}{f(v)-f(\zeta)}+\sum\left[\frac{1}{v-zk}-\frac{1}{v-\zeta K}\right]$$

Or :

$$\sum\left[\frac{1}{v-zk}-\frac{1}{v-\zeta K}\right]=S_R \quad \text{si} \quad H(z)=\frac{1}{v-z}.$$

Donc :

$$I_R=2i\pi(S_R+\text{ fonction indépendante de } R)$$

Or la limite de I_R est finie ; donc celle de S_R est également finie, c'est-à-dire que :

si z et ζ sont à l'intérieur de Q,

si $H(z)=\frac{1}{v-z}$,

si l'ordre des termes est convenable,

la série que nous avons considérée au début est convergente.

Le terme tout intégré étant nul pour la même raison que précédemment il vient :

$$I_R=-\int\varphi(t)\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{(t-v)^2f'(t)}\right]dt.$$

Faisons tendre R vers l'infini ; $\varphi(t)$ reste fini, le contour d'intégration reste fini ; $f'(t)$ tend vers l'infini ; donc :

$$\frac{1}{(t-v)^2f'(t)} \text{ et } \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{(t-v)^2f'(t)}\right]$$

tend vers 0. Donc l'intégrale I_R tend vers 0.

$$\lim I_R=0.$$

Je dis que si je change z en zM ou en zN, ou bien ζ en ζM ou en ζN, la série reste convergente.

En effet, changeons par exemple z en zM. Cela revient à ajouter à la série la suite des termes :

$$\sum [H(zM \cdot K) - H(z \cdot K)],$$

or, ou bien $z \cdot K$, $z \cdot M \cdot K$, $z \cdot M^2 \cdot K$, …, $z \cdot M^{n_1-1} \cdot K$ sont à l'intérieur du polygone P'_R et la somme des termes correspondants s'écrit :

$$H(z \cdot M^{n_1} \cdot K) - H(z \cdot M^{n_1-1} \cdot K) + H(z \cdot M^{n_1-1} \cdot K) - \ldots + H(z \cdot M \cdot K) - H(z \cdot K)$$

c'est-à-dire 0.

Ou bien

$$z \cdot K, z \cdot M \cdot K, z \cdot M^2 \cdot K, \ldots, z \cdot M^{\lambda} \cdot K$$

sont à l'intérieur du polygone P'_R pendant que

$$z \cdot M^{\lambda+1} \cdot K,\ z^{\lambda+2} \cdot K,\ \ldots,\ z \cdot M^{n_1-1} \cdot K$$

sont à l'extérieur.

La somme des termes correspondants se réduit alors à

$$H(z \cdot M^{\lambda+1} \cdot K) - H(z \cdot K).$$

De sorte qu'en changeant z en $z \cdot M$, on a ajouté à la série une somme de termes

$$\sum \left[H\left(z \cdot M^{\lambda+1} \cdot K\right) - H(z \cdot K) \right]$$

dont chacun correspond à l'un des quadrilatères *limitrophes* du polygone P'_R.

Le nombre de ces termes ne peut donc être plus grand que le maximum du nombre de ces quadrilatères limitrophes, c'est-à-dire que

$$\frac{1}{\Sigma}\pi\left(e^{R+L} - e^{R-L} + e^{-R-L} - e^{-R+L}\right).$$

Le module de chaque terme est plus petit que A (maximum du module de $\frac{dH}{dz}$ quand le module pseudogéométrique de z est plus grand que $R - L$) multiplié par le module de

$$z \cdot M^{\lambda+1} \cdot K - z \cdot K.$$

Or la distance pseudogéométrique des points $zM^{\lambda+1}K$ et $z \cdot K$ est plus petite que $2L$, puisque ces deux points appartiennent à deux quadrilatères transformés de Q opposés par le sommet. Donc leur distance géométrique est plus petite que :

$$4hL\frac{e^{R-L}}{\left(e^{R-L}+1\right)^2}.$$

Le maximum de la somme de termes ajoutée à la série est donc

$$\frac{4hL\pi}{\Sigma} \qquad \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{R}} - e^{2R-2L} + e^{-2L} - 1}{\left(e^{R-L} + 1\right)^2}$$

dont la limite pour $R = \infty$ est

$$\frac{4hL\pi}{\Sigma}\left(e^{2L} - 1\right) A.$$

Donc la somme de termes ajoutée à la série reste finie quand R tend vers l'infini ; donc la série reste convergente quand on change z en zM. Or en appliquant à z et à ζ, les opérations M et N dans un ordre convenable, on peut faire prendre à ces variables toutes les valeurs comprises à l'intérieur du cercle HH'. Donc la série fuchsienne reste convergente quand z et ζ restent à l'intérieur de ce cercle. Nous appellerons sa limite $\varphi(z, \zeta)$.

Infinis de $\frac{1}{f'(\zeta)}$.

Si $f(z)$ est la fonction fuchsienne, $f'(z)$ sa dérivée, si y_1 et y_2 sont les deux intégrales de l'équation proposée, on a

$$\begin{aligned} x &= f(z), \\ y_1 &= \sqrt{f'(z)}, \\ y_2 &= z\sqrt{f'(z)}, \end{aligned}$$

$f'(z)$ ne peut s'annuler sans que y_1 et y_2 s'annulent à la fois, car z ne peut devenir infini.

Donc $f'(z)$ ne peut s'annuler que pour

$$x = a \qquad \text{ou pour} \qquad x = b$$

c'est-à-dire pour les points singuliers.

Remarquons en passant que les intégrales y_1 et y_2 ne peuvent s'annuler que pour $x = a$, ou pour $x = b$; puisque pour $z = 0$, on a encore $x = a$.

Qu'une intégrale quelconque

$$\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2$$

ne s'annulera que pour $x = a$, ou pour $x = b$ si le point $-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ est à l'extérieur du cercle HH' et qu'elle ne s'annulera que pour $x = a$, pour $x = b$ et pour une autre valeur de x et une seule, si ce point est à l'intérieur de HH'. Si 0 et α sont les valeurs de z qui correspondent à $x = a$ et $x = b$, $f'(z)$ ne pourra s'annuler que pour :

$$z = 0 \cdot K, \qquad z = \alpha \cdot K,$$

le symbole K représentant l'une des opérations combinées à l'aide de M et de N.

De même si γ est la valeur de z qui correspond à $x = \infty$, $f'(z)$ ne peut devenir infini que pour

$$z = \gamma \cdot K,$$

proposons-nous pour $z = 0$ d'ordonner $\frac{1}{f'(x)}$ suivant les puissances croissantes de z ; pour $z = 0$, nous avons $x = a$; or pour $x = a$; on a :

$$y_1 = (x-a)^{\alpha_1}\, \theta_1(x),$$
$$y_2 = (x-a)^{\alpha_2}\, \theta_2(x),$$

d'où :

$$(z-a)^{\rho_1}\, \theta(x) \times A$$

$\theta(x)$ étant une série ordonnée suivant les puissances croissantes de $x - a$ et dont les coefficients sont faciles à calculer et A étant un facteur constant jusqu'ici inconnu. On déterminera A par la condition :

$$\lim\, (x-a)^{\rho_1}\, \theta(x) \cdot A \qquad\qquad (\text{pour } x = b) = \alpha$$

Cette condition exige un calcul numérique compliqué. Une fois qu'il sera effectué, on calculera sans peine autant de coefficients qu'on voudra de $f(z)$, de $f'(z)$ ou de $\frac{1}{f'(x)}$ en séries ordonnées suivant les puissances de z.

Soit maintenant pour $z = \alpha$ à ordonner $\frac{1}{f'(x)}$ suivant les puissances croissantes de $z - \alpha$.

Pour cela, remarquons que pour $x = b$, on a :

$$y_1 - \alpha y_2 = (x-b)^{\beta_1}\, \theta_1(x) A_1$$
$$y_1 - \beta y_2 = (x-b)^{\beta_2}\, \theta_2(x) A_2,$$

$\theta_1(x)$ et $\theta_2(x)$ étant des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de $x - b$, et dont les coefficients sont connus ; A_1 et A_2 étant des coefficients constants jusqu'ici inconnus.

On en tire

$$\frac{z-\alpha}{z-\beta} = (x-b)^{\rho_2}\, \theta_3(x) A_3,$$

où A_3 est inconnu pendant que les coefficients de $\theta_3(x)$ sont connus. Il faut encore ici calculer A_3 avec une approximation numérique quelconque à l'aide de la condition

$$\lim\ (\text{x-b})^{\rho 2}\, \theta_3(x) A_3 \quad (\text{pour } x = a) = \frac{\alpha}{\beta},$$

et une fois ce calcul fait, on trouvera sans peine autant de coefficients qu'on voudra de $\frac{1}{f'(x)}$ ordonné suivant les puissances de $\frac{z-\alpha}{z-\beta}$ ou bien ordonné suivant les puissances de $z - \alpha$.

Soit maintenant à trouver le développement de $\frac{1}{f'(x)}$ suivant les puissances de $z - O \cdot K$ ou de $z - \alpha \cdot K$.

Pour cela remarquons :[7] si l'opération K consiste à changer z en

$$\frac{\lambda z+\mu}{\lambda_1 z+\mu_1}$$

de telle sorte que

$$z.K=\frac{\lambda z+\mu}{\lambda_1 z+\mu_1}\quad \lambda\mu_1-\mu\lambda_1=1,$$

on aura :

$$\frac{d(z\cdot K)}{dz}=\frac{1}{(\lambda_1 z+\mu_1)^2}$$
$$f\,(z\cdot K)=f\,(z)$$
$$f'\,(z\cdot K)=f'\,(z)\,(\lambda_1 z+\mu_1)^2$$

et

$$\frac{1}{f'\,(z\cdot K)}=\frac{1}{f'\,(z)}\,(\lambda_1 z+\mu_1)^{-2}\,.$$

Supposons donc que pour $z=0$, on ait :

$$\frac{1}{f'(z)}=\sum A_m z^m.$$

Soit maintenant à développer $f(z)$ suivant les puissances croissantes de

$$z-OK=z-\frac{\mu}{\mu_1}.$$

On n'a dans la formule :

$$\frac{1}{f'\,(z\cdot K)}=\frac{1}{f'\,(z)}\,(\lambda_1 z+\mu_1)^{-2}\,.$$

qu'à changer zK en z et z en zK^{-1} où :

$$z=\frac{\lambda zK^{-1}+\mu}{\lambda_1 zK^{-1}+\mu_1}$$

ou

$$zK^{-1}=\frac{\mu-\mu_1 z}{\lambda_1 z-\lambda}$$

et

$$\lambda_1 zK^{-1}+\mu_1=\frac{1}{\lambda_1 z-\lambda}$$

et :

$$\frac{1}{f'(z)}=\frac{1}{f'\left(zK^{-1}\right)}\,(\lambda_1 z-\lambda)^2$$

ou

$$\frac{1}{f'(z)}=\sum A_m\frac{(\mu-\mu_1 z)^m}{(\lambda_1 z-\lambda)^{m-2}}.$$

7. Variante : “Pour cela remarquons : que l'on a, si …”.

De ce développement on déduit aisément le développement de cette même fonction suivant les puissances croissantes de $z - \frac{\mu}{\mu_1}$.

Nous appellerons $\Lambda(O \cdot K)$ l'ensemble des termes de cette série dont les exposants sont négatifs ; d'après ce qu'on vient de voir $\Lambda(O \cdot K)$ se déduit par une opération très simple de $\Lambda(O)$.

Quand on connaît la valeur numérique du coefficient que nous avons appelé plus haut A, le calcul de $\Lambda(O)$ et par conséquent celui de $\Lambda(O \cdot K)$ n'exige plus que des additions, des multiplications et des divisions numériques.

Appelons de même $\Lambda(\alpha K)$ la somme des termes d'exposant négatif dans le développement de $\frac{1}{f'(z)}$ par rapport aux puissances croissantes de $z - \alpha K$. Nous déduirons $\Lambda(\alpha K)$ de $\Lambda(\alpha)$ comme nous avons déduit $\Lambda(OK)$ de $\Lambda(O)$ et par conséquent, dès que nous connaîtrons la valeur numérique de A_3 nous pourrons calculer les coefficients de $\Lambda(\alpha K)$ par les opérations ordinaires de l'arithmétique.

Cela posé, considérons l'intégrale

$$\int \frac{dt}{f'(t)(t-z)}$$

prise le long du polygone P'_R ; je dis que cette intégrale tend vers 0 quand R tend vers l'infini. En effet le périmètre d'intégration reste fini (*voir* page 27).

De plus $\frac{1}{t-z}$ reste fini et $\frac{1}{f'(z)}$ tend vers 0. En effet supposons que t soit compris dans le quadrilatère $Q \cdot K$ et soit u le point correspondant du quadrilatère Q, on aura

$$\frac{1}{f'(t)} = \frac{1}{f'(u)} \frac{dt}{du}$$

Or le module de $\frac{dt}{du}$ est plus petit que la maximum du rapport de la distance géométrique[8] de deux points situés dans le quadrilatère QK à leur distance pseudogéométrique, et si le quadrilatère QK est l'un des quadrilatères limitrophes du polygone P'_R on a vu page 27 que ce maximum est :

$$2h \frac{e^{R-L}}{\left(e^{R-L}+1\right)^2}$$

et tend par conséquent vers 0 quand R tend vers l'infini.

Il pourrait y avoir une difficulté parce que $\frac{1}{f'(t)}$ devient infini sur le contour d'intégration. Mais cette difficulté est aisée à tourner.

En effet soit S une figure qui diffère du quadrilatère Q, parce que l'on a contourné les points $z = 0$ et $z = \alpha$, $z = \alpha \cdot M$ par de petits arcs de cercle comme l'indique la figure où les traits pointillés représentent le contour du quadrilatère Q partout où il ne se confond pas avec celui de la figure S dont le contour est indiqué en trait plein.

Soit K une opération quelconque telle que $Q \cdot K$ fasse partie de P_R. Soit SK la transformée de S par l'opération K.

L'ensemble des figures SK va former une figure dont le contour *extérieur* différera peu du périmètre de P'_R, si les arcs de *cercles décrits autour des points* O *etc. sont de petit rayon.*

8. Variante : "la distance ~~pseudo~~géométrique".

Je dis le contour *extérieur* pour éviter toute confusion parce que l'ensemble des figures S_K laissera vides certains petits cercles décrits autour des points $O \cdot K$.

Prenons alors l'intégrale, non plus le long de P'_R, mais le long du contour *extérieur* de la figure formée par l'ensemble des figures $S \cdot K$. Le long de ce nouveau périmètre d'intégration (qui est fini pour R infiniment grand) $\frac{1}{f'(u)}$ reste fini ; $\frac{dt}{du}$ comme nous l'avons vu devient infiniment petit ; donc $\frac{1}{f'(u)}$ et par conséquent l'intégrale elle-même devient infiniment petite. Donc :

$$\text{limite de l'intégrale} = 0.$$

Or la limite de l'intégrale a une autre expression ; à savoir $2i\pi$ multiplié par la somme des résidus relatifs aux pôles situés à l'intérieur du contour d'intégration ; cette limite de la somme des résidus est :

$$\frac{1}{f'(z)} - \lim \Sigma\Lambda(O \cdot K) - \lim \Sigma\Lambda(\alpha \cdot K).$$

C'est dire que $\frac{1}{f'(z)}$ peut être représenté par la série infinie :

$$\Sigma\Lambda(O \cdot K) + \lim \Sigma\Lambda(\alpha \cdot K).$$

Chaque terme de cette série est de la forme :

$$\frac{A}{(x-\lambda)^m}.$$

Les valeurs des λ et des m se calculent par les opérations ordinaires de l'arithmétique ; quand aux A, on peut les calculer tous à l'aide de simples additions, multiplications ou divisions toutes les fois qu'on connaît la valeur numérique de deux d'entre eux (qui déterminent les coefficients que nous avons appelés plus haut A et A_3).

Développement de $\frac{f(z)}{f'(z)}$.

La fonction $\frac{f(z)}{f'(z)}$ peut se développer en séries absolument de la même manière. Les infinis de cette fonction sont en effet des points

$$z = O \cdot K, \quad z = \alpha \cdot K, \quad z = \gamma \cdot K$$

et l'on peut développer la fonction en séries ordonnées suivant les puissances de

$$z - O \cdot K, \quad z - \alpha \cdot K, \quad z - \gamma \cdot K$$

On trouvera les coefficients de cette série par les méthodes qui ont permis de développer $\frac{1}{f'(z)}$.

Nous appellerons :

$$\Lambda_1\,(O \cdot K)\,, \quad \Lambda_1\,(\alpha, K)\,, \quad \Lambda_1\,(\gamma, K)$$

l'ensemble des termes de ces développements dont les exposants sont négatifs.

Si l'on considère maintenant l'intégrale :

$$\int \frac{f(t)}{f'(t)} \frac{dt}{t-z}$$

prise le long du contour *extérieur* de l'ensemble des figures *SK*, cette intégrale est infiniment petite pour $R = \infty$ pour la même raison que l'intégrale considérée à propos de $\frac{1}{f'(z)}$.

Or cette intégrale s'écrit

$$2i\pi \left[\frac{f(z)}{f'(z)} - \sum \Lambda_1 (O \cdot K) - \sum \Lambda_1 (\alpha \cdot K) - \sum \Lambda_1 (\gamma \cdot K) \right],$$

Donc :

$$\frac{f(z)}{f'(z)} - \sum \Lambda_1 (O \cdot K) - \sum \Lambda_1 (\alpha \cdot K) - \sum \Lambda_1 \left(\gamma \cdot K'\right),$$

ce qui donne le développement de cette fonction en série convergente dans toute l'étendue du cercle HH'.

Remarques.

1° Par la même méthode on développerait :

$$\frac{F\,(f\,(z))}{f'\,(z)}$$

$F\,(f(z))$ étant une fonction rationnelle quelconque en $f\,(z)$;

2° $f\,(z)$ étant le quotient de $\frac{f(z)}{f'(z)}$ par $\frac{1}{f'(z)}$ s'exprime par le quotient de deux séries convergentes dans toute l'étendue du cercle HH'.

Fonctions zétafuchsiennes.

Considérons une nouvelle équation différentielle linéaire [9] :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y \left[\frac{A}{(x-a)^2} + \frac{2C}{(x-a)\,(x-b)} + \frac{B}{(x-b)^2} \right]$$

de la même forme que l'équation considérée au début, mais où la différence des racines de l'équation déterminante est respectivement

$$\begin{array}{ll} \text{pour } x = a & 2K_1\rho_1 \\ \text{pour } x = b & 2K_2\rho_2 \\ \text{pour } x = \infty & 2Kr \end{array}$$

9. Variante : "…nouvelle équation ~~aux dérivées partielles~~".

où K_1, K_2, K sont entiers c'est-à-dire que ces différences sont des multiples pairs des différences correspondantes relatives à l'équation différentielle qui nous a servi à définir la fonction fuchsienne.

Soient $F(x)$ et $\Phi(x)$ deux intégrales de cette équation ; intégrales choisies de telle sorte que si λ_1 et λ_2 sont les racines de l'équation déterminante relative au point singulier $x = a$; on ait :

$F(x) = (x - a)^{\lambda_1} \times$ fonction holomorphe de $x - a$,

$\Phi(x) = (x - a)^{\lambda_2} \times$ fonction holomorphe en $x - a$.

Soit :

$$\alpha' = \frac{F(b)}{\Phi(b)}, \qquad \gamma' = \frac{F(\infty)}{\Phi(\infty)},$$

Joignons les points a, b, ∞ par des coupures. Quand x revient à sa valeur primitive, après avoir franchi la coupure ab,

$$\frac{F(x)}{\Phi(x)} \text{ se change en } \frac{F(x)}{\Phi(x)} e^{4iK_1\pi\rho_1}.$$

Quand x revient à sa valeur après avoir franchi la coupure $b\infty$:

$$\frac{F(x) - \gamma'\Phi(x)}{F(x) - \delta'\Phi(x)} \text{ se change en } \frac{F(x) - \gamma'\Phi(x)}{F(x) - \delta'\Phi(x)} e^{4iK\pi r},$$

δ' étant une constante.

γ' peut être choisi arbitrairement ; et on en déduit aisément les valeurs de δ' et de α' ; car on a

$$\frac{\gamma'}{\delta'} = \frac{\cos 2\pi K_2\rho_2 + \cos 2\pi\ (K_1\rho_1 + Kr)}{\cos 2\pi K_2\rho_2 + \cos 2\pi\ (K_1\rho_1 - Kr)}$$

et α' est lié à γ' par une relation du même genre. Une fois qu'on s'est donné γ' on peut donc savoir ce que devient le rapport

$$\frac{F(x)}{\Phi(x)}$$

(en fonction de sa valeur primitive) quand x revient à sa valeur primitive après avoir franchi les coupures un nombre de fois déterminé et dans un ordre déterminé. [10]

On trouvera que

$$\frac{F(x)}{\Phi(x)} \quad \text{s'est changé en} \quad \frac{\varepsilon F(x) + \zeta\Phi(x)}{\varepsilon' F(x) + \zeta'\Phi(x)}$$

où ε, ζ, ε', ζ' sont des constantes dont les valeurs se déduisent aisément de celles de γ', δ', α', ρ_1, ρ_2, r, K_1, K_2, K.

On en conclura que

$$F(x) \text{ s'est changé en } \lambda\varepsilon F(x) + \lambda\zeta\Phi(x)$$

10. Variante barrée : "Si par exemple x a franchi la coupure ab, puis la coupure $b\infty$, puis la coupure ab : $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ s'est changé en $e^{4i\pi K_1\rho_1}$".

$$\Phi(x) \text{ s'est changé en } \lambda\varepsilon' F(x) + \lambda\zeta'\Phi(x)$$

où λ est une constante déterminée par la condition

$$\lambda^2(\varepsilon\zeta' - \varepsilon'\zeta) = 1.$$

En particulier quand x a franchi une fois la coupure ab,

$$F(x) \text{ se change en } -e^{2iK_2\rho_2} F(x) \text{ ou } \lambda F(x),$$
$$\Phi(x) \text{ se change en } -e^{-2iK_2\rho_2} \Phi(x) \text{ ou } \mu\Phi(x).$$

Nous dirons que $F(x)$ et $\Phi(x)$ ont subi l'opération M_1.
Quand x a franchi la coupure $b\infty$,

$$F(x) \text{ se change en } AF(x) + B\Phi(x),$$
$$\Phi(x) \text{ se change en } A_1 F(x) + B_1\Phi(x).$$ [11]

Nous dirons que $F(x)$ et Φ(x) ont subi l'opération N_1.
Quand x revient à la même valeur après avoir franchi un certain nombre de coupures, $F(x)$ et $\Phi(x)$ subissent une opération combinée à l'aide de M_1 et de N_1.
Nous dirons que $F(x)$ et $\Phi(x)$ ont subi l'opération K_1, si elles subissent l'opération

$$M_1^{\lambda_1} N_1^{\mu_1} M_1^{\lambda_2} N_1^{\mu_2}$$

et que l'on appelle K l'opération correspondante

$$M^{\lambda_1} N^{\mu_1} M^{\lambda_2} N^{\mu_2}$$

qui est subie par z quand x revient à la même valeur après avoir franchi les coupures dans un ordre convenable.
Quand $F(x)$ et $\Phi(x)$ ont subi l'opération K_1,

$$F(x) \text{ s'est changé en } cF(x) + d\Phi(x)$$
$$\Phi(x) \text{ s'est changé en } c_1 F(x) + d_1\Phi(x)$$

c, d, c_1, d_1 étant des constantes.
Il est facile de trouver les valeurs de c, d, c_1, d_1. Soit en effet par exemple

$$K_1 = M, N_1 M_1$$

on aura :

$$[F(x)]\, K_1 = A\lambda^2 F(x) + B\lambda\mu\Phi(x),$$
$$[\Phi(x)]\, K_1 = A_1\lambda\mu F(x) + B_1\mu^2\Phi(x).$$

Supposons qu'on se propose de trouver le maximum des valeurs de c, d, c_1, d_1 pour une opération

$$K_1 = M_1^{\lambda_1} N_1^{\mu_1} M_1^{\lambda_2} N_1^{\mu_2}$$

11. Note marginale : “$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}_1$, $\boldsymbol{B}_1$ étant des constantes dont les valeurs se déduisent de celles de γ', δ', $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{r}$”.

où

$$\lambda_1 + \mu_1 + \lambda_2 + \mu_2 < m.$$

Il est clair :

1° que c, d, c_1, d_1 seront des polynômes en A, B, A_1, B_1 , λ, μ,

2° que leur degré en λ, μ sera :

$$\lambda_1 + \lambda_2;$$

3° que leur degré en A, B, A_1, B_1 sera

$$\mu_1 + \mu_2;$$

4° que le nombre des termes sera [12]

$$2^{\mu_2+\mu_2};$$

5° que le coefficient de chaque terme sera 1. On en conclut que si U est le plus grand des modules des quatre quantités A, B, A_1 , B_1, on a :

$$\begin{aligned} \operatorname{mod} c &< (2U)^m \\ \operatorname{mod} d &< (2U)^m \\ \operatorname{mod} c_1 &< (2U)^m \\ \operatorname{mod} d_1 &< (2U)^m. \end{aligned}$$

Supposons maintenant que nous remplacions dans $F(x)$ et $\Phi(x)$, x par sa valeur $f(z)$, c'est-à-dire par la fonction fuchsienne.

Il est clair que $F(x)$ et $\Phi(x)$ deviennent des fonctions Θ_1 et Θ_2 de z ; que ces fonctions n'existent pas quand z est extérieur au cercle HH'.

Quand z est intérieur à ce cercle, je dis que les fonctions Θ_1 et Θ_2 sont méromorphes. En effet, supposons que z décrive un contour, infiniment petit autour d'un point quelconque de son plan ; x décrira alors un contour fermé autour du point correspondant de son plan, puisque x est fonction monodrome de z.

Si le point autour duquel tourne z, n'est, ni un des points $O \cdot K$, ni un des points $\alpha \cdot K$, ni un des points $\gamma \cdot K$; x tourne autour d'un point qui n'est pas un point singulier et par conséquent Θ_1 et Θ_2 reprennent les mêmes valeurs.

Si z tourne d'un point $O \cdot K$, x tourne autour du point singulier a ; et décrit autour de ce point $\frac{1}{\rho_1}$ tours. ($\frac{1}{\rho_1}$ est, on le sait, un entier). Or

$$\begin{aligned} \Theta_1(z) &= (x-a)^{\frac{1}{2}+K_1\rho_1}\, \Theta'_1(x), \\ \Theta_2(z) &= (x-a)^{\frac{1}{2}+K_1\rho_1}\, \Theta'_2(x), \end{aligned}$$

Θ'_1 et Θ'_2 étant holomorphes.

Supposons désormais que $\frac{1}{\rho_1}$, $\frac{1}{\rho_2}$, $\frac{1}{r}$ soient pairs. On verra aisément que quand x décrira $\frac{1}{\rho_1}$ tours autour de a, $\Theta_1\,(\underline{z})$ et $\Theta_2\,(\underline{z})$ reviendront à la même valeur.

12. Variante : "…termes sera ~~au maximum~~ …".

Il en sera de même, pour la même raison, quand z tournera autour d'un des points $a \cdot K$ ou d'un des points $g \cdot K$. Donc Θ_1 et Θ_2 sont fonctions monodromes de z.

Ces fonctions subissent l'opération M_1, quand z subit l'opération M ; l'opération N_1 quand z subit l'opération N.

En général, quand z subit une opération K combinée à l'aide de M et de N, elles subissent l'opération correspondante K_1. Nous les appellerons fonctions zétafuchsiennes parce qu'elles nous semblent présenter quelque analogie avec les fonctions zéta que l'on considère dans la théorie des fonctions doublement périodiques.

Développement des fonctions zétafuchsiennes.

Soit d'abord à développer Θ_1 et Θ_2 suivant les puissances croissantes de z ; pour $z = 0$, on a $x = a$; et dans le voisinage de $x = a$; on a

$$(H) \quad \begin{aligned} \Theta_1 &= (x-a)^{\frac{1}{2}+K_1\rho_1} \quad \Theta'_1(x)B_1 \\ \Theta_2 &= (x-a)^{\frac{1}{2}+K_1\rho_1} \quad \Theta'_2(x)B_2, \end{aligned}$$

où $\Theta'_1(x)$, $\Theta'_2(x)$ sont des séries ordonnées suivant les puissances de $x-a$, et dont on connaît les coefficients, pendant B_1 et B_2 sont des constantes jusqu'ici inconnues. On choisira B_1 arbitrairement; quant à B_2 on le déterminera par la condition que quand x tend vers b,

$$\lim \frac{\Theta_1}{\Theta_2} = \alpha'.$$

De même quand on connaît la valeur numérique de la constante que nous avons appelée A (*voir* p. 34), on peut calculer aisément les coefficients du développement de

$$x = f(z) \qquad \text{et de} \qquad \tfrac{dz}{dx} = \tfrac{1}{f'(z)}$$

suivant les puissances de z.

Donc rien n'est plus facile que de trouver les coefficients du développement de

$$\Theta_1 \qquad \text{de} \qquad \Theta_2$$

ou

$$\text{de } \frac{\Theta_1}{(f'z)^p}, \quad \frac{\Theta_2}{(f'z)^p}$$

suivant les puissances de z.

Supposons maintenant qu'on se propose de développer Θ_1 et Θ_2 ou

$$\Theta_1(f'z)^{-p}, \qquad \Theta_2(f'z)^{-p}$$

suivant les puissances de $z - \alpha$.

Pour $z = \alpha$, on a $x = b$, et dans le voisinage de $x = b$, on a

$$(K) \quad \begin{aligned} \Theta_1 - \alpha'\Theta_2 &= (x-b)^{\frac{1}{2}+K_2\rho_2}\, \Theta'_3(x)B_3, \\ \Theta_1 - \beta'\Theta_2 &= (x-b)^{\frac{1}{2}+K_2\rho_2}\, \Theta'_4(x)B_4, \end{aligned}$$

β' étant une quantité liée à α' par la relation :

$$\frac{\alpha'}{\beta'} = \frac{\cos 2Kr\pi + \cos 2\pi\,(K_1\rho_1 + K_2\rho_2)}{\cos 2Kr\pi + \cos 2\pi\,(K_1\rho_1 - K_2\rho_2)}$$

Θ_3' et Θ_4' étant des séries ordonnées suivant les puissances de $x - b$ et dont on connaît les coefficients ; B_3 et B_4 étant des constantes jusqu'ici inconnues.

On déterminera B_3 et B_4 en identifiant les valeurs de Θ_1 et Θ_2 tirées des développements (H) et (K) pour une valeur de x qui rend ces deux développements également convergents.

Quand on connaîtra la valeur numérique de la constante que j'ai appellé plus haut A_3 on connaîtra les coefficients des développements suivant les puissances de $z-\alpha$ de

$$\frac{1}{f'(z)} \text{ et } f(z).$$

On en déduira aisément les coefficients des développements suivant les mêmes puissances des fonctions :

$$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_1\left(f'z\right)^{-p}\,\Theta_2\left(f'z\right)^{-p}$$

On développera de la même façon les mêmes fonctions suivant les puissances de $z-\gamma$.

Soit maintenant à développer ces fonctions suivant les puissances de $z - O\cdot K$.

Supposons que l'opération K consiste à changer

$$z \text{ en } \tfrac{\lambda z+\mu}{\lambda_1 z+\mu_1}$$

qu'à l'opération K corresponde l'opération K_1 ; c'est-à-dire que K_1 soit formé avec M_1 et N_1de la même façon que K avec M et N et que cette opération K_1 consiste à changer

$$\Theta_1 \text{ en } c\Theta_1 + d\Theta_2$$
$$\text{et } \Theta_2 \text{ en } c_1\Theta_1 + d_1\Theta_2.$$

Quand on changera z en $z\cdot K$, Θ_1 et Θ_2 se changeront en $c\Theta_1 + d\Theta_2$ et $c_1\Theta_1 + d_1\Theta_2$.

Supposons que dans le voisinage de $z = 0$, on ait :

$$\Theta_1 = \sum A_m z^m,$$
$$\Theta_2 = \sum B_m z^m.$$

On aura alors :

$$\Theta_1\,(z\cdot K) = \sum (cA_m + dB_m)z^m,$$
$$\Theta_2\,(z\cdot K) = \sum (c_1A_m + d_1B_m)z^m.$$

Changeons dans ces formules

$$z\cdot K \text{ en } z \qquad \text{et} \qquad z \text{ en } z'$$

où

$$z' = \frac{\mu - z\mu_1}{\lambda_1 z - \lambda}.$$

Il viendra

$$\Theta_1(z) = \sum (cA_m + dB_m)\left[\frac{\mu - z\mu_1}{\lambda_1 z - \lambda}\right]^m,$$
$$\Theta_2(z) = \sum (c_1 A_m + d_1 B_m)\left[\frac{\mu - z\mu_1}{\lambda_1 z - \lambda}\right]^m,$$

d'où l'on déduit aisément les développements de Θ_1 et de Θ_2 suivant les puissances de $z - \frac{\mu}{\mu_1}$, c'est-à-dire les puissances de $z - O \cdot K$. Comme on possède déjà le développement de $\frac{1}{f'(z)}$ suivant les mêmes puissances, on trouvera sans difficulté les développements de $\Theta_1\,(f'z)^{-p}$ et $\Theta_2\,(f'z)^{-p}$.

Appelons $\Lambda_2(O \cdot K)$ et $\Lambda_3(O \cdot K)$ l'ensemble des termes de ces deux développements qui ont des exposants négatifs. D'après ce que l'on vient de voir, on voit que $\Lambda_2(O \cdot K)$ et $\Lambda_3(O \cdot K)$ se déduisent de $\Lambda_2(O)$ et $\Lambda_3(O)$ par les opérations ordinaires de l'arithmétique.

Appelons de même $\Lambda_2(\alpha, K)$, $\Lambda_3(\alpha, K)$, $\Lambda_2(\gamma \cdot K)$, $\Lambda_3(\gamma, K)$ ceux des termes des développements de $\Theta_1\,(f'z)^{-p}$ et $\Theta_2\,(f'z)^{-p}$ dont les exposants sont négatifs. On les calculera à l'aide de $\Lambda_2(\alpha)$,$\Lambda_3(\alpha)$, $\Lambda_2(\gamma)$, $\Lambda_3(\gamma)$ comme on a calculé $\Lambda_2(O \cdot K)$, $\Lambda_3(O \cdot K)$ à l'aide de $\Lambda_2(O)$,$\Lambda_3(O)$.

Cela posé, considérons les intégrales

$$\int \Theta_1(t)(f't)^{-p}\,(t-z)^{-1}\,dt,$$
$$\int \Theta_2(t)(f't)^{-p}\,(t-z)^{-1}\,dt,$$

prises le long du contour extérieur de l'ensemble des figures $S \cdot K$; puis faisons tendre R vers l'infini. Je dis que les intégrales tendront vers 0.

En effet, soit t un point du contour d'intégration situé sur une figure *SK*, soit u le point correspondant de la figure S.

On aura, voir page 39,

$$\left(f't\right)^{-p} < \left(f'u\right)^{-p}\,\frac{e^{p(R-L)}}{\left(e^{(R-L)}-1\right)^p}\,(2h)^p\,.$$

D'un autre côté, on aura :

$$\Theta_1(t) = c\,\Theta_1(u) + d\Theta_2(u)\,,$$
$$\Theta_2(t) = c_1\Theta_1(u) + d_1\Theta_2(u)\,,$$

et si l'on peut réaliser l'opération K en faisant franchir à x moins de m coupures on a vu page 48 que

$$\text{mod } c < (2U)^m \qquad \text{mod } d < (2U)^m,$$
$$\text{mod } c_1 < (2U)^m \qquad \text{mod } d_1 < (2U)^m,$$

U étant une constante donnée.

Or m est égal au nombre minimum des côtés des quadrilatères transformés de Q que l'on rencontre en allant du point u au point t, puisque chaque fois que z traverse un de ces côtés dans son plan, x franchit une coupure dans le sien.

Quel est donc le minimum de m, il est clair qu'un segment de droite de longueur pseudogéométrique donnée, de longueur l par exemple, ne peut rencontrer qu'un nombre limité de côtés des quadrilatères transformés de Q ; il ne peut par exemple en rencontrer plus de n.

Donc la droite tu dont la longueur pseudogéométrique est plus petite que $R+L$ ne peut en rencontrer plus de

$$\frac{n}{\rho}(R+L),$$

de sorte que

$$m < \tfrac{n}{b}(R+L),$$

et

$$\operatorname{mod} c < (2U)^{\frac{n}{\rho}(R+L)},$$

et qu'il en est de même de mod. d, mod. c_1 , mod. d_1. Donc

1° $\frac{1}{f'(t)} < \frac{1}{f'(u)}\alpha_1 e^{-R}$

α_1 étant une constante facile à déterminer. [13]

2° $\operatorname{mod} c < \alpha_2 e^{2^R}$,

de même que mod. d, mod. c_1, mod. d_1 ; α_2 et β_2 étant des constantes. On pourra toujours prendre la quantité entière positive p assez grande pour que :

$$\beta_2 < p.$$

Alors on aura

$$\begin{aligned}
\Theta_1(t)(f't)^{-p} &< \alpha_2 e^{(\beta_2-p)R}\left(\Theta_1(u)(f'(u))^{-p}+\Theta_2(u)(f'u)^{-p}\right)\\
\Theta_2(t)(f't)^{-p} &< \alpha_2 e^{(\beta_2-p)R}\left(\Theta_1(u)(f'(u))^{-p}+\Theta_2(u)(f'u)^{-p}\right)
\end{aligned}$$

Le second membre de ces inégalités tend vers 0 quand R tend vers l'infini. Donc le premier membre tend également vers 0. Donc dans les deux intégrales que nous envisageons, les fonctions sous le signe $\int$ tendent vers 0. Or le périmètre d'intégration reste fini. Donc les deux intégrales tendent vers 0. Or on peut trouver une autre valeur de ces deux intégrales ; les limites de ces deux intégrales sont en effet égales respectivement (à un facteur constant $2i\pi$ près) à

$$\Theta_1(z)\left(f'z\right)^{-p} - \Sigma\Lambda_2(O\cdot K) - \Sigma\Lambda_2(\alpha\cdot K) - \Sigma\Lambda_2(\gamma\cdot K),$$

et

$$\Theta_2(z)\left(f'z\right)^{-p} - \Sigma\Lambda_3(O\cdot K) - \Sigma\Lambda_3(\alpha\cdot K) - \Sigma\Lambda_3(\gamma\cdot K).$$

Donc les fonctions $\Theta_1(z)(f'z)^{-p}$ et $\Theta_2(z)(f'z)^{-p}$sont égales respectivement aux limites des deux séries

$$\sum\Lambda_2(O\cdot K) + \Sigma\Lambda_2(\alpha\cdot K) + \Sigma\Lambda_2(\gamma\cdot K),$$

et

$$\sum\Lambda_3(O\cdot K) + \Sigma\Lambda_3(\alpha\cdot K) + \Sigma\Lambda_3(\alpha\cdot K).$$

qui sont convergentes dans toute l'étendue du cercle HH'.

Comme on connaît déjà le développement de $\frac{1}{(f'z)^p}$ par une série analogue, Θ_1 [va] se trouver exprimé par le quotient de deux séries convergentes dans toute l'étendue du cercle HH' ; et il en sera de même de Θ_2. [14]

13. Variante : "α_1 ~~et β_1~~ étant~~s des~~ constante~~s~~ facile~~s~~ à déterminer."
14. Variante : Θ_1 "~~et Θ_2 vont se~~ trouver exprimé ...".

Propriétés des fonctions zétafuchsiennes.

On voit aisément comment les fonctions zétafuchsiennes permettent d'intégrer l'équation

(L) $$\frac{d^2y}{dx^2} = y\left[\frac{A_1}{(x-a)^2} + \frac{B_1}{(x-b)^2} + \frac{2C_1}{(x-a)(x-b)}\right]$$

où la différence des racines de chaque équation déterminante est respectivement

$$2K_1\rho_1 \quad 2K_2\rho_2 \quad 2Kr.$$

Soit en effet, une seconde équation différentielle

(P) $$\frac{d^2y}{dx^2} = y\left[\frac{A}{(x-a)^2} + \frac{B}{(x-b)^2} + \frac{2C}{(x-a)(x-b)}\right]$$

où la différence des racines de chaque équation déterminante est respectivement

$$\rho_1 \quad \rho_2 \quad r.$$

(Je suppose toujours que K_1, K_2, K, $\frac{1}{\rho_1}$, $\frac{1}{\rho_2}$, $\frac{1}{r}$ sont entiers).

Soient y'_1, y'_2 les deux intégrales de l'équation (L), y_1, y_2 les deux intégrales de l'équation (P), soit

$$\frac{y'_1}{y'_2} = z', \quad \frac{y_1}{y_2} = z.$$

x sera une fonction fuchsienne de z que nous désignerons par

(Q) $\quad x = f(z, \rho_1, \rho_2, r)$,

y et y'_2 seront alors des fonctions zétafuchsiennes de z que nous désignerons par

(R) $\quad y'_1 = \Theta_1\,(z, \rho_1, \rho_2, r, K_1, K_2, K)$

(S) $\quad y'_2 = \Theta_2\,(z, \rho_1, \rho_2, r, K_1, K_2, K)$

Les trois équations (Q) (R) (S) définissent y'_1 et y'_2 en fonctions de x, c'est-à-dire qu'elles permettent d'intégrer l'équation (L).

Supposons maintenant que :

$$\frac{1}{2K_1\rho_1} \qquad \frac{1}{2K_2\rho_2} \qquad \frac{1}{2Kr}$$

soient entiers.

Alors x sera fonction fuchsienne de z' et on pourra écrire

$$x = f\left(z', 2K_1\rho_1, 2K_2\rho_2, 2Kr\right),$$

ou bien :

$$f\,(z, \rho_1, \rho_2, r) = f\left[\frac{\Theta_1}{\Theta_2}, 2K_1\rho_1, 2K_2\rho_2, 2Kr\right]$$

ce qui montre qu'*une fonction fuchsienne du rapport de deux fonctions zétafuchsiennes de* z *peut être elle-même une fonction fuchsienne de* z.

Si l'on suppose de plus :

$$\frac{1}{2K_1\rho_1} + \frac{1}{2K_2\rho_2} + \frac{1}{2\mathrm{Kr}} = 1$$

x devient fonction doublement périodique de z'.

Donc *une fonction doublement périodique du rapport de deux fonctions zétafuchsiennes de* z *peut être elle-même une fonction fuchsienne de* z.

Si

$$\frac{1}{2K_1\rho_1}+\frac{1}{2K_2\rho_2}+\frac{1}{2Kr}>1$$

x devient rationnel en z'.

Donc :

Une fonction rationnelle du rapport de deux fonctions zétafuchsiennes de z *peut être elle-même une fonction fuchsienne de z.*

Séries thétafuchsiennes.

Considérons la série

$$S_R=\Sigma H(z\cdot K)\left(\frac{dz\cdot K}{dz}\right)^m.$$

Dans cette expression H est une fonction rationnelle quelconque, m un nombre entier, K l'une des opérations telles que le quadrilatère $Q\cdot K$ fasse partie du polygone P'_R.

Faisons tendre R vers l'infini ; je dis que S_R tendra vers une limite finie, c'est-à-dire que la série proposée est convergente.

Soit en effet λ ne longueur pseudogéométrique quelconque ; et soit

$$s_n=S_{n\lambda}-S_{(n-1)\lambda}.$$

Quel est le maximum du nombre des termes qui font partie de s_n ; il est égal au nombre des quadrilatères qui ont quelque sommet à l'intérieur du cercle de rayon $n\lambda$ et qui n'en ont pas à l'intérieur du cercle de rayon $(n-1)\lambda$.

Si N_1 est le nombre des quadrilatères qui font partie du polygone $P_{n\lambda}$, si N_2 est celui des quadrilatères qui font partie du polygone $P'_{(n-1)\lambda}$, si n_1 est le nombre des termes de s_n on a donc :

$$n_1=N_1-N_2.$$

Mais on a, voir page 25

$$\begin{aligned}N_1&<\tfrac{\pi}{\Sigma}\left(e^{n\lambda}+e^{-n\lambda}-2\right),\\ N_2&>\tfrac{\pi}{\Sigma}\left(e^{(n-1)\lambda-L}+e^{-(n-1)\lambda+L}-2\right),\end{aligned}$$

donc :

$$n_1<\frac{\pi}{\sum}\left[e^{n\lambda}\left(1-e^{-(\lambda+L)}\right)+e^{-n\lambda}\left(1-e^{\lambda+L}\right)\right].$$

Quel est maintenant le maximum du module de chaque terme de s_n .

D'abord supposons que z ait une valeur déterminée qui ne rende pas $H(z)$ infini non plus qu'aucun des $H(z\cdot K)$ et qui soit comprise dans le quadrilatère Q.

Alors il existe une quantité A, telle que :

$$\text{mod }H(z\cdot K)<A,$$

quel que soit K.

De plus $\frac{dz \cdot K}{dz}$ est plus petit qu'une certaine constante B, multipliée par la plus grande valeur possible du rapport de la distance géométrique de deux points du quadrilatère $Q \cdot K$ à leur distance pseudogéométrique.

Or si le terme qui contient $\left(\frac{dz \cdot K}{dz}\right)^m$ fait partie de s_n ; la plus grande valeur de ce rapport est, voir p. 27,

$$2h \frac{e^{n\lambda-\lambda-L}}{\left(e^{n\lambda-\lambda-L}+1\right)^2}.$$

Donc si σ_n est la somme des modules de tous les termes qui font partie de s_n ; on aura :

$$\text{mod}.s_n < \sigma_n < \frac{(2h)^m \, A \cdot B^m \pi}{\sum} \frac{e^{(m+1)n\lambda}\left(1-e^{-(\lambda+L)}\right)e^{-\lambda-L}}{\left(e^{n\lambda-\lambda-L}+1\right)^{2m}}.$$

Dans le dernier membre de l'inégalité j'aurais dû avoir au numérateur de la 2^{de} fraction un terme en :

$$e^{(m-1)n\lambda}\left(1-e^{\lambda+L}\right)e^{-\lambda-L},$$

mais comme il est négatif je ne l'ai pas écrit. Quand n tend vers l'infini :

$$\lim \frac{\sigma_{n+1}}{\sigma_n} = e^{(1-m)\lambda} < 1,$$

pourvu que $m > 1$. Donc à cette condition, la série :

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n$$

est convergente ; or cette série n'est autre chose que la série

$$\sum \text{mod} \left[H(z \cdot K)\left(\frac{dz \cdot K}{dz}\right)^m\right].$$

Donc la série des modules des termes de S_R est convergente.

Donc la série S_R est convergente quel que soit l'ordre de ses termes (pourvu que z ne rende infini aucun des $H(z \cdot K)$ et soit à l'intérieur du quadrilatère Q).

Comme la somme de S_R est, nous venons de le voir, indépendante de l'ordre des termes ; on aura, en appelant $\varphi(z)$ la limite de la série

$$\varphi(z) = \sum H(z \cdot K)\left(\frac{dz \cdot K}{dz}\right)^m = \sum H(z \cdot L \cdot K)\left(\frac{dz \cdot L \cdot K}{dz}\right)^m,$$

L étant une opération quelconque combinée à l'aide de M et de N.

On aura alors :

$$\varphi(z \cdot L) = \sum H(z \cdot L \cdot K)\left(\frac{dz \cdot L \cdot K}{dz \cdot L}\right)^m = \sum H(z \cdot L \cdot K)\left(\frac{dz \cdot L \cdot K}{dz}\right)^m\left(\frac{dz}{dz \cdot L}\right)^m,$$

ou :

$$\varphi(z \cdot L) = \varphi(z)\left(\frac{dz}{dz \cdot L}\right)^m,$$

ce qui à la fois, nous donne la preuve que la série reste convergente quand on change z en $z \cdot L$, la preuve, par conséquent, que cette série est convergente toutes les fois que z reste à l'intérieur du cercle $H \cdot H'$ et en même temps nous fait découvrir une propriété très importante de cette série.

Cette série, je l'appelle série thétafuchsienne à cause de ses nombreuses analogies avec les fonctions Θ.

Les séries thétafuchsiennes se divisent immédiatement en deux catégories :

1° si la fonction $H(z)$ ne devient pas infinie à l'intérieur du cercle *HH'*, aucune des fonctions $H(z \cdot K)$ ne devient infinie à l'intérieur de ce cercle, et la série thétafuchsienne reste holomorphe à l'intérieur de ce cercle, de telle sorte qu'elle peut être représentée dans cette étendue par une série ordonnée suivant les puissances de z.

2° si la fonction $H(z)$ devient infinie à l'intérieur du cercle HH', la série thétafuchsienne reste méromorphe [15] à l'intérieur de ce cercle.

Considérons deux séries thétafuchsiennes correspondant à une même valeur de m.

Soient $\varphi(z)$ et $\varphi_1(z)$ ces deux séries :

On aura

$$\varphi\,(z \cdot L) = \varphi\,(z) \left(\frac{dz}{dz{\cdot}L}\right)^m,$$
$$\varphi_1\,(z \cdot L) = \varphi_1\,(z) \left(\frac{dz}{dz{\cdot}L}\right)^m.$$

Donc

$$\frac{\varphi\,(z \cdot L)}{\varphi_1\,(z \cdot L)} = \frac{\varphi\,(z)}{\varphi_1\,(z)}$$

c'est-à-dire que le rapport $\frac{\varphi(z)}{\varphi_1(z)}$ n'est pas altéré par les opérations combinées à l'aide de M et de N ; de plus cette fonction est méromorphe pour toutes les valeurs de z situées à l'intérieur du cercle $H \cdot H'$.

Donc cette fonction est monodrome en $f(z) = x$ si $f\ (z)$ est la fonction fuchsienne; pour la connaître pour toutes les valeurs de x, il suffit de l'étudier dans l'intérieur du quadrilatère Q. On reconnaît alors qu'elle est méromorphe. C'est donc une fonction de x qui est méromorphe pour toutes les valeurs de cette variable finies et infinies; c'est donc une fonction rationnelle de x, d'où ce résultat important :

Le quotient de deux séries thétafuchsiennes (*correspondant à une même valeur de* m) *est une fonction rationnelle de la fonction fuchsienne.*

Séries thétazéta.

Nous allons définir des séries que nous appellerons séries thétazéta parce qu'elles seront aux fonctions zétafuchsiennes, ce que les séries thétafuchsiennes sont aux fonctions fuchsiennes.

Soient $\Theta_1(z)$ et $\Theta_2(z)$ deux fonctions zétafuchsiennes qui subissent l'opération K_1 quand z subit l'opération K, et l'opération L_1 quand z subit l'opération L.

Supposons que l'opération K_1^{-1} consiste à changer

$$\begin{aligned} &\Theta_1 \text{ en } c\Theta_1 + d\Theta_2 \\ &\Theta_2 \text{ en } c_1\Theta_1 + d_1\Theta_2 \quad \text{ou } cd_1 - c_1 d = 1, \end{aligned}$$

15. Variante : "…reste ~~holomorphe~~ …".

que l'opération L_1 consiste à changer :

$$\begin{array}{l} \Theta_1 \text{ en } \gamma_1\Theta_1 + \delta_1\Theta_2 \\ \Theta_2 \text{ en } \gamma_2\Theta_1 + \delta_2\Theta_2 \quad \gamma_1\delta_2 - \delta_1\gamma_2 = 1 \end{array}$$

et par conséquent l'opération L_1^{-1} à changer :

$$\begin{array}{l} \Theta_1 \text{ en } \gamma_1\Theta_2 - \gamma_2\Theta_1 \\ \Theta_2 \text{ en } \delta_2\Theta_1 - \delta_1\Theta_2 \end{array}$$

et l'opération $(L_1 K^1)^{-1}$ à changer :

$$\begin{array}{l} \Theta_1 \text{ en } (d\delta_2 - c\gamma_2)\,\Theta_1 + (c\gamma_1 - d\delta_1)\,\Theta_2 \\ \Theta_2 \text{ en } (d_1\delta_2 - c_1\gamma_2)\,\Theta_1 + (c_1\gamma_1 - d_1\delta_1)\,\Theta_2. \end{array}$$

Soient H_1 et H_2 deux fonctions rationnelles quelconques. Nous poserons pour abréger :

$$\begin{array}{l} H_1 K_1^{-1} = cH_1 + dH_2, \\ H_2 K_1^{-1} = c_1 H_1 + d_1 H_2, \end{array}$$

et nous définirons de même les notations

$$\begin{array}{ll} H_1 L_1, & H_2 L_2, \\ H_1 L_1^{-1}, & H_2 L_2^{-1}, \\ H_1 (L_1 K_1)^{-1}, & H_2 (L_2 K_2)^{-1}, \text{ etc.} \end{array}$$

Considérons les séries

$$\begin{array}{l} S_R = \sum \left(\frac{dz\cdot K}{dz}\right)^m H_1\,(z\cdot K)\,K_1^{-1} \\ S'_R = \sum \left(\frac{dz\cdot K}{dz}\right)^m H_2\,(z\cdot K)\,K_2^{-1} \end{array}$$

l'opération K étant l'une de celles qui sont telles que le quadrilatère $Q\cdot K$ fasse partie du polygone P_R. Je dis que S_R et S_R' tendent vers une limite finie quand R tend vers l'infini.

Soit en effet comme plus haut :

$$\begin{array}{l} s_n = S_{n\lambda} - S_{(n-1)\lambda}, \\ s'_n = S'_{n\lambda} - S'_{(n-1)\lambda}, \end{array}$$

Soient σ_n et σ'_n la somme des modules de tous les termes de s_n et s'_n.

Le nombre des termes de s_n ou de s'_n est plus petit que (voir p. 62) :

$$\frac{\pi}{\Sigma}\left[e^{n\lambda}\left(1 - e^{-(\lambda+L)} + e^{-n\lambda}\right)\left(1 - e^{\lambda+L}\right)\right] < \frac{\pi}{\Sigma}e^{n\lambda}.$$

Quel est maintenant le maximum du module de chaque terme de s_n et de s'_n .

Il existe une quantité A telle que

$$\text{mod } H_1(z\cdot K) \quad < \quad A,$$

$$\text{mod } H_2(z \cdot K) \quad < \quad A,$$

une quantité B telle que :

$$\text{mod}\frac{dzK}{dz} < 2hB\frac{e^{n\lambda-\lambda-L}}{\left(e^{n\lambda-\lambda-L}+1\right)^2} < 2hBe^{\lambda+L}e^{-n\lambda}.$$

Or les termes généraux des séries S_R et S'_R s'écrivent :

$$\left(\tfrac{dz\cdot K}{dz}\right)^m H_1(z\cdot K)K_1^{-1} = \left(\tfrac{dzK}{dz}\right)^m cH_1(z\cdot K) + \left(\tfrac{dzK}{dz}\right)^m dH_2(z\cdot K),$$
$$\left(\tfrac{dz\cdot K}{dz}\right)^m H_2(z\cdot K)K_1^{-1} = \left(\tfrac{dzK}{dz}\right)^m c_1H_1(z\cdot K) + \left(\tfrac{dzK}{dz}\right)^m d_1H_2(z\cdot K),$$

or les modules de c, d, c_1, d_1 sont plus petits que :

$$(2U)^p,$$

$2U$ étant une quantité donnée et p une quantité de la forme $\varepsilon n + \zeta$, ε et ζ étant des constantes faciles à calculer, voir pages 48, 55 et 56.

Donc les modules des termes de s_n et de s'_n sont plus petits que :

$$2A(2hBe^{\lambda+L})^m(2U)^\zeta e^{n[\varepsilon L(2U)-m\lambda]},$$

Donc on a

$$\text{mod}s_n < \sigma_n < 2\tfrac{\pi}{\Sigma}A(2U)^\zeta\left(2hBe^{\lambda+L}\right)^m e^{n[\varepsilon L(2U)+1-m\lambda]}$$
$$\text{mod}s'_n < \sigma'_n < 2\tfrac{\pi}{\Sigma}A(2U)^\zeta\left(2hBe^{\lambda+L}\right)^m e^{n[\varepsilon L(2U)+1-m\lambda]}$$

Donc les séries

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n,$$
$$\sigma'_1 + \sigma'_2 + \ldots + \sigma'_n$$

sont convergentes pourvu que m soit assez grand pour que :

$$m\lambda > \varepsilon\mathrm{L}(2U) + 1.$$

Donc à cette condition les séries des modules des termes des deux séries S_R et S'_R sont convergentes.

Donc ces deux séries sont convergentes quel que soit l'ordre des termes. Nous aurons donc en appelant $\varphi_1(z)$ et $\varphi_2(z)$ les limites de ces deux séries :

$$\varphi_1(z) = \sum\left(\tfrac{dzK}{dz}\right)^m H_1(z\cdot K)\,K_1^{-1},$$
$$\varphi_2(z) = \sum\left(\tfrac{dzK}{dz}\right)^m H_2(z\cdot K)\,K_1^{-1},$$

et d'autre part :

$$\varphi_1(z) = \sum\left(\tfrac{dzLK}{dz}\right)^m H_1(z\cdot L\cdot K)\,K_1^{-1}L_1^{-1},$$
$$\varphi_2(z) = \sum\left(\tfrac{dzLK}{dz}\right)^m H_2(z\cdot L\cdot K)\,K_1^{-1}L_1^{-1}$$

puisqu'on peut intervertir l'ordre des termes et que d'ailleurs on a identiquement

$$(L_1 K_1)^{-1} = K_1^{-1} L_1^{-1}.$$

D'autre part, on a :

$$\varphi_1(z \cdot L) = \sum \left(\frac{dzLK}{dz}\right)^m H_1(z \cdot L \cdot K)\, K_1^{-1} L_1^{-1} L_1 \left(\frac{dz}{dzL}\right)^m,$$
$$\varphi_2(z \cdot L) = \sum \left(\frac{dzLK}{dz}\right)^m H_2(z \cdot L \cdot K)\, K_1^{-1} L_1^{-1} L_1 \left(\frac{dz}{dzL}\right)^m.$$

Mais à cause de la nature particulière de l'opération L_1, on a :

$$\sum (\lambda_n H_n L_1) = \left(\sum \lambda_n H_n\right) L_1,$$
$$\sum \left(\lambda_n H_n' L_1\right) = \left(\sum \lambda_n H_n'\right) L_1.$$

Si justement on définit comme nous l'avons fait :

$$H_n L_1 = \gamma_1 H_n + \delta_1 H_n',$$
$$H_n' L_1 = \gamma_2 H_n + \delta_2 H_n',$$

et :

$$\left(\sum \lambda_n H_n\right) L_1 = \gamma_1 \left(\sum \lambda_n H_n\right) + \delta_1 \left(\sum \lambda_n H_n'\right),$$
$$\left(\sum \lambda_n H_n'\right) L_1 = \gamma_2 \left(\sum \lambda_n H_n\right) + \delta_2 \left(\sum \lambda_n H_n'\right).$$

On en conclut que l'on a

$$\varphi_1(z \cdot L) = \left(\frac{dz}{dz \cdot L}\right)^m \varphi_1(z) L_1,$$
$$\varphi_2(z \cdot L) = \left(\frac{dz}{dz \cdot L}\right)^m \varphi_2(z) L_1.$$

Ici encore nous devons faire une distinction entre deux catégories de séries thétazéta.

Si en effet ni $H_1(z)$ ni $H_2(z)$ ne deviennent infinies à l'intérieur du cercle *HH'* les séries thétazéta restent holomorphes à l'intérieur de ce cercle.

Si cela n'a pas lieu, elles sont méromorphes.

Soit maintenant $\varphi(z)$ une fonction thétafuchsienne correspondant à la même valeur de m que les séries $\varphi_1(z)$ et $\varphi_2(z)$, on aura :

$$\frac{\varphi_1(z \cdot L)}{\varphi(z \cdot L)} = \gamma_1 \frac{\varphi_1(z)}{\varphi(z)} + \delta_1 \frac{\varphi_2(z)}{\varphi(z)},$$
$$\frac{\varphi_2(z \cdot L)}{\varphi(z \cdot L)} = \gamma_2 \frac{\varphi_1(z)}{\varphi(z)} + \delta_2 \frac{\varphi_2(z)}{\varphi(z)},$$

d'où :

$$\frac{\varphi_1(z \cdot L)}{\varphi(z \cdot L)} = \frac{\varphi_1(z)}{\varphi(z)} L_1 \qquad \frac{\varphi_2(z \cdot L)}{\varphi(z \cdot L)} = \frac{\varphi_2(z)}{\varphi(z)} L_1.$$

Donc quand z subit l'opération L, $L_1 \frac{\varphi_1(z)}{\varphi(z)}$ et $\frac{\varphi_2(z)}{\varphi(z)}$ subissent l'opération L_1.

Conséquence ; si l'on considère :

$$\frac{\varphi_1(z)}{\varphi(z)} \text{ et } \frac{\varphi_2(z)}{\varphi(z)}$$

comme des fonctions de la fonction fuchsienne $f(z) = x$, ce sont des fonctions qui sont susceptibles d'une infinité de valeurs pour chaque valeur de x.

Seulement un système quelconque de valeurs se déduit du système initial par une substitution linéaire. C'est dire que

$$y = \frac{\varphi_1(z)}{\varphi(z)}, \text{y=}\frac{\varphi_2(z)}{\varphi(z)}$$

sont deux solutions d'une équation différentielle :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + U\frac{dy}{dx} + Vy = 0,$$

U et V étant des fonctions monodromes de x. Pour étudier U et V, pour toutes les valeurs de x, finies et infinies, il suffit d'étudier ces fonctions pour toutes les valeurs de z comprises à l'intérieur du quadrilatère Q. On reconnaît alors que ces fonctions sont méromorphes pour toutes les valeurs finies et infinies de x, c'est-à-dire que ce sont des fonctions rationnelles de x.

Conséquence ; *les fonctions* $\frac{\varphi_1(z)}{\varphi(z)}$ *et* $\frac{\varphi_2(z)}{\varphi(z)}$ *satisfont à une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels.*

En choisissant convenablement φ, φ_1 et φ_2, on doit pouvoir s'arranger de telle sorte que :

$$\frac{\varphi_1}{\varphi} = \Theta_1, \quad \frac{\varphi_2}{\varphi} = \Theta_2.$$

Origine des séries thétafuchsiennes.

Une série thétafuchsienne est évidemment égale à

$$\left(f'z\right)^m F(fz)$$

F étant une fonction rationnelle.

Quelle est en particulier l'origine des séries thétafuchsiennes qui sont holomorphes dans toute l'étendue du cercle HH' ?

Soit :

$$\frac{f'(z)}{[f(z)-a]^\lambda\,[f(z)-b]^\mu}.$$

Cette fonction de z ne peut devenir infinie que pour

$$z = O \cdot K, \qquad z = \alpha \cdot K, \qquad z = \gamma \cdot K.$$

pour $z = O \cdot K$ si $\frac{1}{\rho_1} - 1 > \lambda\frac{1}{\rho_1}$
Elle restera finie pour $z = \alpha \cdot K$ si $\frac{1}{\rho_2} - 1 > \mu\frac{1}{\rho_2}$
pour $z = \gamma \cdot K$ si $\frac{1}{r} + 1 < (\lambda + \mu)\frac{1}{r}$

Or ces trois conditions peuvent être remplies à la fois, puisque :

$$\rho_1 + \rho_2 + r < 1..$$

On peut toujours supposer que les quantités λ, et μ qui satisfont à ces inégalités sont commensurables ; soit

$$\lambda \frac{n}{m}, \ \mu = \frac{p}{m},$$

m, n, p étant entiers. La fonction

$$\frac{(f'z)^m}{[f\,(z) - a]^n\,[f\,(z) - b]^p}$$

sera holomorphe dans toute l'étendue du cercle HH'. Ce sera cette fonction qui sera l'origine des séries thétafuchsiennes holomorphes dans toute la superficie de ce cercle. Cette expression de cette fonction permet de trouver sans peine une série ordonnée suivant les puissances croissantes de z et qui la représente dans toute l'étendue du cercle HH'.

Origine des séries thétazéta.

La même méthode est applicable aux séries thétazéta qui sont holomorphes dans toute l'étendue de ce cercle. Soit en effet à former une fonction qui jouisse des mêmes propriétés que ces séries, et qui soit toujours holomorphe. Remarquons que les fonctions Θ_1 et Θ_2 admettent pour

$$z = O \cdot K, \qquad z = \alpha \cdot K, \qquad z = \gamma \cdot K$$

des infinis d'ordre donné ; d'ordre H_1 par exemple pour $z = O \cdot K$; H_2 pour $z = \alpha \cdot K$; H_3 pour $z = \gamma \cdot K$.

On en conclut que les fonctions :

$$\Theta_1\,(z)\,\frac{(f'z)^m}{(f - a)^n\,(fz - b)^p},\ \Theta_2\,(z)\,\frac{(f'z)^m}{(fz - a)^n\,(fz - b)^p},$$

sont toujours holomorphes pourvu que :

$$\begin{array}{l} m\left(\frac{1}{\rho_1} - 1\right) > H_1 + \frac{n}{\rho_1} \\ m\left(\frac{1}{\rho_2} - 1\right) > H_2 + \frac{p}{\rho_2} \\ H_3 + m\left(\frac{1}{r} + 1\right) < (m + p)\frac{1}{r} \end{array}$$

conditions auxquelles il est possible de satisfaire à la fois.

Nous pourrons donc exprimer ces fonctions par des séries ordonnées suivant les puissances de z ; et Θ_1 nous sera [16] alors donné comme le quotient de deux pareilles séries.

16. Variante : “Θ_1 ~~et Θ_2 nous seront~~ …”.

Résumé.

Les considérations qui précèdent permettent d'intégrer l'équation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\left[\frac{A}{(x-a)^2} + \frac{B}{(x-b)^2} + \frac{2C}{(x-a)(x-b)}\right] \tag{1}$$

toutes les fois que la différence des racines de chaque équation déterminante est commensurable, et qu'il n'y a pas de logarithmes dans les développements des intégrales. Supposons d'abord que pour chaque équation déterminante, cette différence soit une partie aliquote de l'unité et appelons ρ_1, ρ_2 et r, ces trois différences. Nous n'aurons rien à dire du cas où

$$\rho_1 + \rho_2 + r \geq 1$$

et où x est fonction rationnelle ou doublement périodique du rapport des deux intégrales. Si au contraire :

$$\rho_1 + \rho_2 + r < 1$$

nous dirons que x est fonction fuchsienne de ce rapport que nous appellerons z.

La fonction fuchsienne n'existe pas à l'extérieur d'un certain cercle *HH'* et elle reste méromorphe à l'intérieur de ce cercle ; elle ne change pas quand on change

$$z \text{ en } \frac{\alpha z + \beta}{\alpha' z + \beta'},$$

$\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ étant des constantes convenablement choisies ; de plus cela a lieu pour une infinité de systèmes de valeurs des constantes

$$\alpha, \beta, \alpha', \beta'.$$

Considérons maintenant une seconde équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\left[\frac{A_1}{(x-a)^2} + \frac{B_1}{(x-b)^2} + \frac{2C_1}{(x-a)(x-b)}\right] \tag{2}$$

de même forme que l'équation (1) ; mais où la différence des racines de chaque équation déterminante est un multiple pair de la différence correspondante relative à l'équation (1).

Remplaçons dans les expressions des deux intégrales de cette équation, x par sa valeur en fonction de z ; c'est-à-dire par la fonction fuchsienne de z ; ces deux intégrales deviendront des fonctions monodromes de z que nous appelons les fonctions zétafuchsiennes.

Ces fonctions n'existent pas à l'extérieur du cercle HH' et restent méromorphes à l'intérieur de ce cercle ; quand on y change

$$z \text{ en } \frac{\alpha z + \beta}{\alpha' z + \beta'}$$

ces deux fonctions que nous désignons par Θ_1 et par Θ_2 se changent en

$$c\Theta_1 + d\Theta_2$$

$$c_1\Theta_1 + d_1\Theta_2$$

c, d, c_1, d_1 étant des constantes.

Ces résultats sont encore vrais pour l'équation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\left[\frac{A}{(x-a)^2} + \frac{B}{(x-b)^2} + \frac{C}{(x-c)^2} + \frac{D}{(x-d)^2} + \frac{A_1}{x-a} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{C_1}{x-c} + \frac{D_1}{x-d}\right] \quad (3)$$

quand $A_1 + B_1 + C_1 + D_1 = 0$ et quand la différence des racines de l'équation déterminante est :

pour $x = a$ un multiple pair de ρ_1
pour $x = b$ un multiple pair de ρ_2
pour $x = \infty$ un multiple pair de r
pour $x = c$ un nombre entier
pour $x = d$ un nombre entier

et quand il n'y a pas de logarithmes dans le développement des intégrales. Une pareille équation donne également naissance à des fonctions zétafuchsiennes jouissant des mêmes propriétés que celles qui doivent leur origine à l'équation (2). Il restait à exprimer les fonctions fuchsiennes et zétafuchsiennes à l'aide de séries convergentes dans toute l'étendue du cercle HH'. Pour cela on considère la fonction fuchsienne $f(z)$ comme le quotient de

$$\frac{1}{f'(z)} \quad \text{et} \quad \frac{f(z)}{f'(z)}$$

et la fonction zétafuchsienne $\Theta_1(z)$ comme le quotient de

$$\frac{\Theta_1(z)}{(f'(z))^p} \text{ et } \frac{1}{(f'z)^p}.$$

Ces diverses fonctions sont méromorphes à l'intérieur du cercle HH' et de plus elles tendent vers 0 quand z se rapproche de la circonférence de ce cercle. Elles se réduisent alors à la somme de tous les termes formés de la manière suivante : on développe la fonction suivant les puissances croissantes de $z - \lambda$, dans le voisinage de chaque infini λ ; on prend les termes dont l'exposant est négatif, et l'on ajoute tous les termes ainsi trouvés relatifs à tous les infinis.

On trouve facilement les valeurs des infinis ; quant aux coefficients, on peut les calculer par les opérations ordinaires de l'arithmétique une fois qu'on connaît trois d'entre eux.

Les fonctions fuchsiennes [17] peuvent également être représentées comme le quotient de deux séries que j'appelle thétafuchsiennes et cela d'une infinité de manières. Ces séries thétafuchsiennes, convergentes dans toute l'étendue du cercle HH', sont de deux sortes, les unes sont des séries entières en z, les autres ont tous leurs termes rationnels en z.

17. Variante : “Les fonctions fuchsiennes ~~et zétafuchsiennes~~”.

Je définis de même d'autres séries analogues que j'appelle séries thétazéta et qui, divisées par une série thétafuchsienne, donnent une fonction zétafuchsienne, voir pages 71 et 72. Je n'ai pu toutefois démontrer d'une façon claire que toute fonction zétafuchsienne pouvait être représentée de la sorte ; j'ai fait voir seulement page 74, que toute fonction zétafuchsienne pouvait être regardée comme le quotient de deux séries holomorphes en z, convergentes dans tout le cercle HH' et dont les coefficients sont aisés à trouver.

Un dernier mot ; il pourrait se faire que l'emploi de la pseudogéométrie ne semblât pas légitime à certains esprits ; mais il leur serait facile de traduire dans un autre langage, le langage pseudogéométrique que j'ai employé. Par exemple, on peut supposer que j'ai projeté stéréographiquement tous les points du plan géométrique sur une sphère imaginaire, et alors tout ce que je dis du plan pseudogéométrique doit s'entendre de cette sphère imaginaire, ce que je dis des droites de ce plan doit s'entendre des grands cercles de cette sphère.

Ou bien, on peut considérer directement les points du plan géométrique, et alors la droite pseudogéométrique n'est autre chose qu'un cercle coupant orthogonalement HH' ; la distance pseudogéométrique de deux points est une fonction connue de leurs coordonnées ; la surface pseudogéométrique d'une aire est l'intégrale double :

$$\int dx dx \varphi,$$

prise dans toute l'étendue de cette aire et où φ est une fonction connue de x et de y.

(Henri Poincaré)
Séance du 6 septembre 1880.

Chapitre 2

Concours pour le Grand Prix des Sciences Mathématiques Devise : Non inultus premor 2^e^ Supplément

Je crains d'avoir manqué de clarté dans mon premier supplément et je ne crois pas inutile, avant de généraliser les résultats obtenus, devoir revenir sur ces résultats eux-mêmes afin de donner quelques explications supplémentaires. Je demande à l'Académie mille pardons de toutes ces redites. [1]

Définitions.

Je considère un plan dont tous les points représentent une valeur imaginaire de z, d'après la convention habituelle ; dans ce plan j'envisage un cercle, celui que j'ai appelé jusqu'ici HH' et que j'appellerai désormais cercle fondamental. Je supposerai qu'il a pour centre l'origine et pour rayon l'unité.

J'appelle *plan pseudogéométrique* la partie du plan située à l'intérieur de ce cercle.

droite pseudogéométrique toute circonférence qui coupe orthogonalement le cercle fondamental.

cercle pseudogéométrique un cercle quelconque, ne coupant pas orthogonalement le cercle fondamental.

L' *angle pseudogéometrique* de deux courbes sera égal à leur angle géométrique.

Considérons deux points dans le plan pseudogéométrique, par ces deux points je pourrai toujours faire passer une circonférence coupant orthogonalement le cercle fon-

1. Le manuscrit comporte une annotation de main inconnue : "N° 5".

damental. Envisageons sur cette circonférence le rapport anharmonique de ces deux points et des deux points d'intersection de la circonférence avec le cercle fondamental. Le logarithme de ce rapport anharmonique sera la *distance pseudogéométrique* des deux points.

Enfin la *surface pseudogéométrique* d'une aire donnée sera égale en coordonnées polaires à l'intégrale double :

$$4 \iint \frac{\rho d\rho d\omega}{\left(1-\rho^2\right)^2} \quad \text{prise à l'intérieur de cette aire.}$$

Envisageons maintenant l'opération qui consiste à changer z en

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\alpha' z + \beta'}$$

ou à remplacer le point représentatif de z par le point représentatif de z'.

Une pareille opération transforme les circonférances en circonférences, elle conserve les angles ainsi que le rapport anharmonique de quatre points sur une circonférence.

Si en même temps cette opération conserve le cercle fondamental je l'appellerai *mouvement pseudogéométrique* et je distinguerai les *rotations pseudogéométriques*, mouvements qui conservent deux points réels, et les *translations pseudogéométriques,* mouvements qui ne conservent aucun point réel.

Les mouvements pseudogéométriques transforment les droites et les cercles pseudogéométriques en droites et en cercles pseudogéométriques, ils conservent les longueurs, les angles et les surfaces pseudogéométriques.

D'où l'important résultat qui suit :

Il y a entres les longueurs, les angles et les surfaces pseudogéométriques les mêmes relations qu'entre les longueurs, les angles et les surfaces géométriques, sauf celles qui sont une conséquence du postulatum d'Euclide.

Soit un point dont la distance géométrique à l'origine soit ρ ; sa distance pseudogéométrique à l'origine sera d'après la définition précédente :

$$R = L\frac{1+\rho}{1-\rho} \text{ d'où } \rho = \frac{e^R - 1}{e^R + 1}.$$

La surface pseudogéométrique du cercle de rayon pseudogéométrique R sera donc : [2]

$$4 \iint \frac{\rho d\rho d\omega}{\left(1-\rho^2\right)^2} = 4\pi \int_0^{\rho^2} \frac{d\left(\rho^2\right)}{\left(1-\rho^2\right)^2} = \frac{4\pi}{1-\rho^2} - 4\pi = \frac{4\pi\rho^2}{1-\rho^2}$$

ou bien :

$$\pi \frac{e^{2R} - 2e^R + 1}{e^R} = \pi\left(e^R + e^{-R} - 2\right)$$

ce qui est le résultat trouvé dans le 1[er] supplément.

2. À droite de la première égalité, nous lisons : "$\cancel{2}\pi \int_0^{\rho^2} \frac{d(\rho^2)}{(1-\rho^2)^2}$" ; nous insérons le facteur 4 à la place du 2 barré.

La limite du rapport de cette surface à e^R est π pour $R = \infty$.[3] L'anneau compris entre le cercle de rayon pseudogéométrique R et celui de rayon pseudogéométrique de rayon $R + \pi$ a pour surface pseudogéométrique :

$$\pi \left[e^R \left(e^{\pi} - 1\right) + e^{-R} \left(e^{-\pi} - 1\right) \right],$$

la limite de cette surface divisée par e^R pour $R = \infty$ est

$$\pi(e^{\pi} - 1).$$

Soit K un mouvement pseudogéométrique quelconque, z une quantité quelconque, A le point représentatif de cette quantité, S une figure quelconque. J'appellerai $z \cdot K$; $A \cdot K$, $S \cdot K$ ce que deviennent z, A et S après le mouvement pseudogéométrique K.

Appelons module pseudogéométrique d'une quantité, la distance pseudogéométrique du point représentatif de cette quantité à l'origine, de telle sorte que si :

$$\text{mod.}z = \rho \qquad \text{mod pseud.}z = R$$
$$R = L\frac{1 + \rho}{1 - \rho}.$$

Soit un cercle infiniment petit tel que sa plus petite et sa plus grande distances géométriques à l'origine soient ρ et $\rho + 2d\rho$ [et] sa plus petite et sa plus grande distances pseudogéométriques à l'origine soit R et $R + 2dR$; soient S et Σ ses surfaces géométrique et pseudogéométrique, on aura :

$$S = \pi d\rho^2 \qquad \sum = \pi dR^2$$
$$R = L\tfrac{1-\rho}{1+\rho} \quad \rho = \tfrac{e^R-1}{e^R+1} \quad d\rho = dR\tfrac{2e^R}{\left(e^R+1\right)^2}$$
$$S = \sum \tfrac{4e^{2R}}{\left(e^R+1\right)^4}$$

Soit maintenant un cercle[4] infiniment petit C ayant pour centre un point z de module pseudogéométrique R ; par le mouvement K il se transformera en un cercle infiniment petit $C \cdot K$ ayant pour centre le $z \cdot K$ de module pseudogéométrique $R \cdot K$ et ayant même surface pseudogéométrique que C.

Soit Σ la surface pseudogéométrique de C et de $C \cdot K$; S et S_1 les surfaces géométriques de C et de $C \cdot K$; on aura :

$$S = \sum \tfrac{4e^{2R}}{\left(e^R+1\right)^4}$$
$$S_1 = \sum \tfrac{4e^{2R_1}}{\left(e^{R_1}+1\right)^4} \text{ d'où :}$$
$$\tfrac{S_1}{S} = \sum \tfrac{\left(e^R+1\right)^4 e^{2R_1}}{\left(e^{R_1}+1\right)^4 e^{2R}}$$

3. Variante : "…est $\pi/4$ pour $R = \infty$" ; le dénominateur est barré ici et dans les deux formules suivantes.

4. Variante : "Soient maintenant ~~deux~~ un cercles~~s~~".

Or on a pour la dérivée de $z \cdot K$ par rapport à z :

$$\text{mod}\ \frac{dz \cdot K}{dz} = \sqrt{\frac{S_1}{S}}$$

d'où

$$\text{mod}\ \frac{dz \cdot K}{dz} = \frac{\left(e^R + 1\right)^2 e^{R_1}}{\left(e^{R_1} + 1\right)^2 e^R}.$$

Supposons que R_1 tende vers l'infini ; R restant constant ; on aura :

$$\text{lim.mod.} \quad e^{R_1} \frac{dz \cdot K}{dz} = \frac{\left(e^R + 1\right)^2}{e^R}.$$

Cette formule nous sera fort utile dans la suite.

Telles sont les définitions complètes de ces notions pseudogéométriques que j'ai appliquées à la résolution de certaines équations différentielles linéaires du second ordre.

On se rappelle que j'ai fait voir, en ce qui concerne ces équations si l'on considère x comme fonction du rapport z des deux intégrales, que :

1° Cette fonction n'existe pas quand z est extérieur au cercle fondamental.

2° À l'intérieur de ce cercle, cette fonction est monodrome. Cette deuxième proposition est liée à la suivante :

3° Le plan pseudogéométrique est décomposable en triangles pseudogéométriques égaux entre eux et ayant pour angles des parties aliquotes de π.

La deuxième proposition entraîne la troisième et réciproquement.

Je n'ai pas à revenir sur la première proposition.

Quant à la seconde et à la troisième, j'en ai donné deux démonstrations l'une à la fin du mémoire principal, l'autre au commencement du premier supplément.

La première de ces démonstrations ne s'étendrait pas au cas plus général que j'ai l'intention de traiter ; la seconde n'est pas rigoureuse. C'est pourquoi je crois utile d'en donner encore une troisième démonstration.

Je rappelle que l'on peut distinguer trois sortes de valeurs de z ; 1° celles que peut atteindre z quand x décrit dans son plan ou sur sa sphère un contour fini ; 2° celles vers lesquelles tend z quand x décrit dans son plan un contour infini ; 3° enfin celles que z ne peut jamais atteindre.

M. Fuchs a fait voir que x considéré comme fonction de z reste monodrome dans le voisinage des valeurs de la première sorte. Si donc je montre que, x décrivant un contour fini, z peut prendre toutes ces valeurs intérieures au cercle fondamental j'aurai montré que x est une fonction monodrome de z dans l'intérieur de ce cercle.

Or supposons comme dans le 1^{er} supplément que l'on joigne par des coupures en ligne droite les différents points singuliers et le point ∞ ; quand x décrira tout son plan sans franchir aucune coupure, on a vu que z restait à l'intérieur d'un certain quadrilatère que j'ai appelé Q et dont les côtés sont des droites pseudogéométriques. Quand x décrit tout son plan après avoir franchi les coupures un certain nombre de fois et dans un certain ordre, z reste à l'intérieur d'un certain quadrilatère pseudogéométriquement égal à Q.

Donc on trouvera toutes les valeurs que peut prendre z quand x décrit dans son plan un contour quelconque, de la manière suivante. On divisera le quadrilatère Q en deux triangles pseudogéométriquement égaux par une de ses diagonales ; on considérera l'un de ces triangles T ; on annexera à ce triangle les trois triangles qui lui sont pseudogéométriquement symétriques par rapport à ces différents côtés. On recommencera la même opération pour ces nouveaux triangles et ainsi de suite.

La surface occupée par tous ces triangles sera celle qui sera occupée par les valeurs de z cherchées.

Or je dis qu'un point quelconque intérieur au cercle fondamental fait partie de cette surface. Soit D ce point. En effet joignons ce point à un point intérieur B au triangle T par une droite pseudogéométrique. Cette droite *BD* viendra couper l'un des côtés, A par exemple du triangle T. Soit T_1 le triangle pseudogéométriquement symétrique de T par rapport à A. La droite *BD* rencontrera le côté A_1 du triangle T_1 ; soit T_2 le triangle symétrique de T_1 par rapport à A_1 ; on considérera l'intersection de la droite *BD* avec le côté A_2 du triangle T_2 et ainsi de suite. Je dis qu'après un nombre fini d'opérations on trouvera un triangle T_n à l'intérieur duquel se trouvera le point D.

En effet il suffit de faire voir qu'une droite de longueur pseudogéométrique finie ne peut rencontrer qu'un nombre fini de triangles $T, T_1, T_2, \dots, T_n$.

Or cela est évident ; en effet concevons qu'on entoure les différents sommets des triangles $T, T_1, T_2, \dots, T_n$ de cercles H assez petits pour ne pas se couper, ayant les sommets des triangles pour centres pseudogéométriques et même rayon pseudogéométrique.

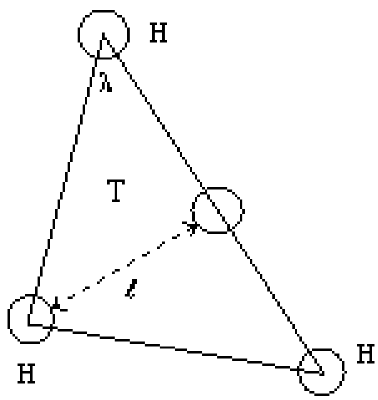
On pourra assigner une longueur pseudogéométrique ℓ ; telle que deux quelconques de ces cercles H soient l'un de l'autre à une distance supérieure à ℓ ; on pourra assigner également une longueur λ telle que tout segment de droite pseudogéométrique allant d'un côté à l'autre d'un des triangles $T, T_1, T_2, \dots, T_n$ et ne coupant aucun des cercles H soit toujours plus grand que λ. Les triangles T, T_1 etc. étant tous pseudogéométriquement égaux entre eux, il suffit en effet de prendre pour ℓ, la plus petite hauteur du triangle T diminuée de deux fois le rayon des cercle H ; pour déterminer λ, on prendra les bissectrices des angles du triangle T ; on considérera l'intersection de chacune de ses bissectrices avec le cercle H correspondant, on mènera en ce point la tangente au cercle H, on envisagera la longueur du segment de cette tangente compris à l'intérieur du triangle T et on prendra pour λ le plus petit des trois segments ainsi trouvé.

Soit n_1, n_2 , n_3 le nombre des triangles qui se groupent autour des trois sommets A, B, C soit $n_1 > n_2 > n_3$.

Il est clair que tout segment de droite compris à l'intérieur d'un cercle H ne peut rencontrer plus de n_1 des triangles T, T_1 etc. Le nombre de triangles T, T_1, T_2, etc. que ce segment peut rencontrer est au plus égal à :

$$\frac{L}{\lambda} + n_1 \frac{L}{\ell}.$$

Donc une droite de longueur pseudogéométrique limitée ne peut rencontrer qu'un nombre fini de triangles T, T_1, T_2, etc. Donc après un nombre fini d'opérations on trouvera un triangle T_n à l'intérieur duquel se trouvera le point D. Donc *toutes les valeurs de* z *intérieures au cercle fondamental sont de la* $1^{ère}$ *sorte.*



Donc *la fonction* x *de* z *que j'ai appelée fonction fuchsienne est monodrome à l'intérieur de ce cercle.*

Donc le plan pseudogéométrique peut être décomposé en une infinité de triangles pseudogéométriquement égaux à T.

Des deux propositions précédentes on peut déduire toutes celles que nous avons établies dans le 1^{er} supplément et je n'ai pas à y revenir. Mais je vais montrer comment elles peuvent se généraliser.

Le plan pseudogéométrique, peut-il, d'une autre façon que celle que je viens de définir, se décomposer en polygones égaux entre eux ?

Commençons par supposer cette décomposition faite ; de façon à découvrir les conditions *nécessaires* pour qu'elle soit possible.

Supposons d'abord que ces polygones soient des triangles scalènes. Soit *ABC* l'un de ces triangles, *ABC* ' un triangle adjacent au premier le long du côté *AB* ; il est clair que le côté *AB* du triangle ABC' doit être l'homologue du côté *AB* du triangle *ABC* ; on peut donc faire deux hypothèses :

1° le sommet A de *ABC* est l'homologue du sommet A du triangle ABC' et B est l'homologue de B. Dans ce cas si l'on a décomposé le plan pseudogéométrique en triangles égaux à *ABC*, *AB* est un axe de symétrie du système de ces triangles.

2° Le sommet A de *ABC* est l'homologue du sommet B de ABC', et B est l'homologue de A. Dans ce cas, le milieu de *AB* est un centre de symétrie du système (au point de vue pseudogéométrique).

Faisons maintenant les 4 hypothèses suivantes, qui sont les seules possibles :

1° Les trois côtés du triangle *ABC* ont des axes de symétrie du système.

C'est le cas que nous avons examiné dans tout ce qui précède ; et d'après ce que l'on a vu : pour que le plan pseudogéométrique soit décomposable en triangles égaux à ABC, il faut et il suffit que chacun des trois angles de ces triangles soit une partie aliquote de π.

2° Aucun des côtés du triangle *ABC* n'est un axe de symétrie du système.

Soit alors *ABD*, *BCE*, *ACF* trois triangles adjacents à *ABC*.

Le sommet A du triangle ABC est l'homologue du sommet B du triangle ABD.

B	A	
B	C	BCE.
C	B	
A	C	ACF.
C	A	

Le sommet A pouvant devenir l'homologue du sommet B et du sommet C tous les sommets du système sont homologues, c'est-à-dire que rien ne distingue l'un de l'autre les divers sommets du système des triangles égaux à ABC qui recouvre le plan pseudo-géométrique.

Considérons donc l'ensemble des triangles qui rayonnent autour du point A.

Dans le triangle ABD, A est l'homologue du sommet B de ABC, B l'homologue de A et D l'homologue de C ; AD est donc l'homologue de BC.

Soit ADH le triangle adjacent à ABD.

Le sommet A de ce triangle est l'homologue du sommet C de ABC.

D	B
H	A

Le côté AH est donc l'homologue de CA.

Soit AHK un triangle adjacent à ADH.

Le sommet A	A
H	C
K	B

Le côté AH est donc l'homologue de AC.

On continuerait la discussion de la sorte jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les triangles qui ont un sommet en A. On voit que ces triangles se succèdent de telle sorte que le sommet A soit pour le 1^{er} d'entre eux homologue au sommet A de ABC, pour le 2^d homologue au sommet B, pour le troisième homologue au sommet C, pour le 4^e au sommet A et ainsi de suite. On en conclut :

1° que le nombre de ces triangles est divisible par 3.

2° que *la somme des angles du triangle ABC est une partie aliquote de* 4 *droits*.

3^e Hypothèse.

L'un des côtés, AB par exemple du triangle ABC est un axe de symétrie du système. Soient ABD, BCE, ACF trois triangles adjacents à ABC.

Le sommet A de ABC est l'homologue du sommet A de ABD.

B	B	
B	C	de BCE.
C	B	
A	C	ACF.
C	A	

Le sommet C peut donc devenir l'homologue du sommet B et du sommet A. Donc tous les sommets du système sont homologues. Considérons l'ensemble des triangles qui rayonnent autour de A : Soient *ABC*, *ABD*, *ADH*, *AHK* etc., ces triangles.

Le sommet A	de ABD est l'homologue	du sommet A	de ABC.
B		B	
D		C	
Le côté AD		du côté AC	
Le sommet A	de ADH	du sommet C	$\cdots$
D		A	
H		B	
Le côté AH		du côté CB	
Le sommet A	de AHK	du sommet B	$\cdots$
H		C	
K		A	
Le côté AK		du côté BA	
Le sommet A	de AKL	du sommet B	
$\cdots$			
K		A	
L		C	
Le côté AL		du côté BC	
Le sommet A	de ALM	du sommet C	$\cdots$
L		B	
M		A	
Le côté AM		du côté CA	
Le sommet A	de AMN	du sommet A	$\cdots$
M		C	
N		B	
Le côté AN		du côté AB	

et ainsi de suite.

On voit que pour le 1$^{\text{er}}$ triangle, le sommet A est homologue du sommet A de *ABC*, pour le 2^d homologue de A ; pour le 3$^{\text{e}}$ de C, pour le 4$^{\text{e}}$ de B, pour le 5$^{\text{e}}$ de B, pour le 6$^{\text{e}}$ de C puisque cela recommence périodiquement, pour le 7$^{\text{e}}$ le sommet A étant l'homologue de A et ainsi de suite.

On en conclut :

1° que le nombre des triangles est divisible par 6.

2° *Que la somme des angles du triangle* ABC *est une partie aliquote de deux droits*.

4$^{\text{e}}$ hypothèse.

Deux des côtés de *ABC* sont des axes de symétrie du système. Soient *AB* et *AC* ces deux côtés.

Dans ce cas le sommet A n'est pas homologue à B et à C qui sont d'ailleurs homologues entre eux.

1° Le nombre des triangles qui rayonnent autour de A est divisible par 2.

2° *L'angle* A *est une partie aliquote de deux droits*.

Soient *BAC*, *BCD*, *BDE* etc. la série des triangles qui rayonnent autour de B.

Le sommet B de BCD est homologue du sommet C de BAC.
C B
D A
Le côté BD du côté CA
Le sommet B de BDE est homologue du sommet C de $\cdots$
D A
E B
Le côté BE du côté CB
Le sommet B de BEF est homologue du sommet B $\cdots$
E C
F A
Le côté BF du côté BA
Le sommet B de BFH est homologue du sommet B $\cdots$
F A
H C

On voit que le nombre des triangles est divisible par 4 et que *la somme des angles B et C est une partie aliquote de 2 droites*. Supposons maintenant que le triangle *ABC* soit isocèle mais non équilatéral de telle sorte que :

$$AB = AC \gtrless BC$$

Soit *ABD* un triangle adjacent à *ABC* ; on peut faire deux hypothèses :

1° Le côté *AB* de *ABD* est homologue du côté *AB* de *ABC*. Dans ce cas la discussion est la même que dans le cas du triangle scalène.

2° Le côté *AB* de *ABD* est homologue du côté *AC* de *ABC*. Cette hypothèse se subdivise en quatre hypothèses secondaires :

1ère hypothèse.

Le sommet A de ABD est homologue du sommet A de ABC.
B C

Le côté *BC* est un axe de symétrie du système.

2e hypothèse.

Le sommet A de ABD est homologue du sommet C de ABC.
B A

Le côté *BC* est un axe de symétrie du système.

3e hypothèse.

Le sommet A de ABD est homologue du sommet A de ABC.
B C

Le côté *BC* n'est pas un axe de symétrie du système.

4e hypothèse.

Le sommet A de ABD est homologue du sommet	C de ABC.
B	A

Le côté *BC* est un axe de symétrie du système.

Il est inutile de discuter ces quatre hypothèses, je me bornerai donc à la première.

Je pourrais ramener ce cas à celui des triangles scalènes en divisant le triangle isocèle en deux triangles scalènes égaux à l'aide de sa hauteur mais comme un pareil procédé ne serait pas applicable aux polygones de plus de trois côtés, je préfère donner la discussion directe :

Considérons les triangles qui rayonnent autour de A. Soient *ACB*, *ABD*, *ADE*, *AEF*, etc. la série de ces triangles :

Le sommet A de ABD est l'homologue de	A dans ABC.
B	C
D	B
Le côté AD	AB
Le sommet A de ADE	A
D	C
E	B
AE	AB

Etc.

On voit que le nombre des triangles qui rayonnent autour de A peut être quelconque et que *l'angle* A *doit être une partie aliquote de* 4 emph droits.

Considérons maintenant les triangles *BCA*, *BAD*, *BDE'*, *BE'F'*, etc. qui rayonnent autour de B.

Dans BAD B est homologue de	C dans ABC.	
D	A	
A	A	
D	B	
BD	CB	
Dans BDE B	C	$\cdots$
D	B	
E'	A	
BE'	CA	
Dans $BE'F'$ B	B	$\cdots$
E'	A	
F'	C	
BF'	BC	
Dans $BF'H'$ B	B	$\cdots$
F'	C	
H'	A	

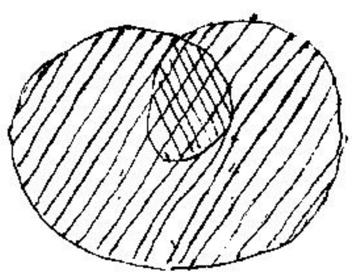
On voit que le nombre des triangles doit être divisible par 4 et *que la somme des angles* B *et* C *est une partie aliquote de 2 droits*.

Les exemples qui précèdent suffisent pour montrer comment devrait être conduite la discussion si au lieu de chercher si le plan pseudogéométrique est décomposable en une infinité de triangles pseudogéométriquement égaux à *ABC*, il s'agissait de savoir si ce plan est décomposable en polygones égaux à un polygone donné de plus de trois côtés. On trouverait de la sorte des conditions nécessaires pour que cette décomposition soit possible.

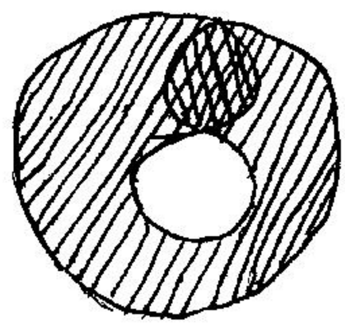
Dans le cas d'un triangle *ABC* ces conditions sont celles qui sont soulignées dans la discussion précédente. Sont-elles suffisantes ? Pour le reconnaître, nous pourrons raisonner de la manière suivante : Si l'on considère un triangle *ABC*, qu'on construise ensuite sur ces trois côtés des triangles adjacents à *ABC* et pseudogéométriquement égaux à *ABC*, puis que sur ces nouveaux triangles on fasse la même opération que sur *ABC*, puis qu'on recommence la même opération indéfiniment, les triangles ainsi obtenus recouvriront une certaine surface F ; qui ira indéfiniment en s'accroissant. Si cette surface finit par recouvrir tout le plan pseudogémétrique sans se recouvrir elle-même, le plan pseudogéométrique sera décomposable en triangles égaux à *ABC* ; si au contraire la surface F finit par se recouvrir elle-même, une pareille décomposition sera impossible.

Mais, comme nous l'avons déjà dit plusieurs fois, la surface F peut se recouvrir elle-même de deux manières différentes :

1ère Manière



2e Manière



Envisageons une fonction auxiliaire Φ jouissant des propriétés suivantes. Ne la définissons d'abord que dans l'intérieur du triangle *ABC*.

1° Pour chaque valeur de z intérieure à *ABC* elle aura une valeur et une seule.

2° Elle sera continue.

3° Ses valeurs sur le périmètre de *ABC* seront assujetties à la loi suivante.

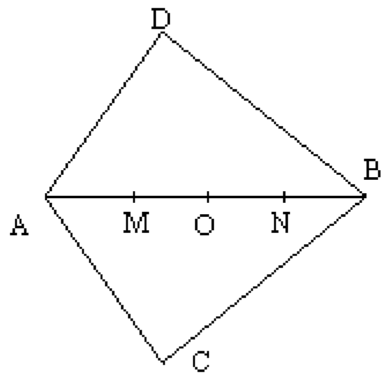
Supposons en particulier que *ABC* soit un triangle scalène et qu'on soit dans la 2e hypothèse, celle où aucun des côtés de *ABC* n'est un axe de symétrie du système.

Dans ce cas le milieu O de *AB* est un centre de symétrie du système ; si $MO = NO$, le point M considéré comme appartenant au triangle *ABD* est homologue du point N considéré comme appartenant au triangle *ABC*.

La fonction Φ sera alors assujettie à reprendre la même valeur au point M et au point N.

La fonction Φ sera définie en dehors du triangle *ABC* de la façon suivante.

Elle aura en chaque point du triangle *ABD* la même valeur qu'au point correspondant du triangle *ABC* ; et de même si l'on considère la série des triangles qui font partie



de la surface F, elle aura en chaque point de chacun de ces triangles la même valeur qu'au point correspondant du triangle ABC.

La fonction Φ est donc définie pour tous les points intérieurs à la surface F, elle ne l'est pas pour les points extérieurs à cette surface. Cette fonction est continue. Elle est monodrome si la surface F ne peut se recouvrir elle-même ; elle ne l'est pas, si la surface F peut se recouvrir elle-même. Il s'agit donc de rechercher si la fonction Φ reste monodrome.

Cette fonction Φ va jouer dans la démonstration pour le cas général le même rôle que la fonction fuchsienne pour le cas qui nous avait occupé d'abord. Il existe toujours une fonction qui satisfait aux conditions énoncées plus haut. Cela ne serait pas évident si nous avions assujetti la fonction Φ à être monogène, mais nous ne l'avons pas fait ; en effet bien qu'il existe des fonctions monogènes satisfaisant aux conditions énoncées, ainsi qu'on le verra plus loin, je n'ai pas fait cette hypothèse parce qu'elle m'est inutile, et parce que je ne serais pas encore en état de démontrer l'existence de semblables fonctions.

Une fonction continue quand même elle ne serait pas monogène, reste monodrome à l'intérieur d'un contour simple, enveloppant une aire *non trouée*, si elle est monodrome dans le voisinage de chacun des points de ce contour.

Les points de la surface F sont de deux sortes : ou bien ils sont à l'intérieur ou sur le périmètre d'un des triangles, ou bien ils sont au sommet d'un des triangles. La définition de la fonction Φ montre qu'elle reste monodrome dans le voisinage des points de la première sorte, et si les conditions nécessaires soulignées dans la discussion précédente sont remplies elle sera également monodrome dans le voisinage des points de la 2^e sorte. Elle est donc monodrome dans le voisinage des points de la surface F.

Maintenant on peut toujours introduire assez de triangles dans la surface F pour que cette surface contienne un point quelconque du plan pseudogéométrique. On se rappelle en effet comment nous avons fait voir pages 6 et 7 qu'une droite pseudogéométrique de longueur pseudogéométrique donnée ne pouvait rencontrer qu'un nombre fini de triangles T_1, T_2, etc., et comment nous avons pu en conclure que l'on pouvait introduire dans la surface occupée par ces triangles assez de triangles pour qu'un point quelconque [5] du plan pseudogéométrique se trouve dans cette surface.

Le même raisonnement s'applique au cas qui nous occupe.

Donc tout point du plan pseudogéométrique fait partie de la surface F.

Donc la fonction Φ reste monodrome dans tout le plan pseudogéométrique.

Donc la surface F ne peut se recouvrir elle-même, ni de la $1^{ère}$, ni de la 2e manière. Donc le plan pseudogéométrique est décomposable en triangles égaux à ABC.

Les mêmes raisonnements s'appliquent si au lieu de la 2^{de} hypothèse on se place dans la 3e ou dans la 4e ; si le triangle ABC est isocèle ou équilatéral ou enfin si au lieu d'un triangle on envisage un polygone d'un nombre quelconque de côtés.

Retenons le résultat suivant qui va être le point de départ de nos recherches.

Le plan pseudogéométrique peut se décomposer d'une infinité de manières en polygones pseudogéométriquement égaux entre eux.

Relations avec la théorie des Formes Quadratiques.

Ici se place une remarque importante. De même qu'il y a un lien intime entre la théorie des fonctions elliptiques, et celles des formes quadratiques binaires définies, de même il y a une relation entre la théorie des nouvelles fonctions que je vais définir et celle des formes quadratiques ternaires indéfinies.

La démonstration nous entraînerait trop loin de notre sujet. Ne donnons ici que le résultat.

Soit $\Phi(x, y, z)$ une forme quadratique ternaire indéfinie quelconque à coefficients entiers. Soit T une des substitutions linéaires à coefficients entiers qui la reproduisent; S la substitution linéaire qui permet de passer de la forme $\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2$ à la forme Φ, S^{-1} la substitution inverse. Il est clair que la substitution que l'on peut représenter symboliquement par :

$$S.T.S^{-1} \text{ reproduira } \xi^2 + \eta^2 - \zeta^2.$$

Considérons la quantité imaginaire

$$\frac{\xi}{\zeta} + \sqrt{-1}\frac{\eta}{\zeta}.$$

Supposons que la substitution $S.T.S^{-1}$ que nous désignerons pour abréger par K, consiste à changer $\xi + \eta - \zeta_1$ en $\xi_1 + \eta_1 - \zeta$ de telle sorte que :

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta\\ \eta_1 &= \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2\zeta\\ \zeta_1 &= \alpha_3\xi + \beta_3\eta + \gamma_3\zeta\end{aligned}$$

Nous écrirons pour abréger :

$$\begin{aligned}&\tfrac{\xi}{\zeta} + \sqrt{-1}\tfrac{\eta}{\zeta} = z\\ &\tfrac{\xi_1}{\zeta_1} + \sqrt{-1}\tfrac{\eta_1}{\zeta_1} = z \cdot K.\end{aligned}$$

5. Variante : "pour qu~~e tout~~ point ~~donné~~".

Les substitutions T sont en nombre infini ; les substitutions K sont donc aussi en nombre infini. On a donc[6] si ξ, η, ζ ont des valeurs déterminées, un nombre infini de quantités imaginaires $z \cdot K$ représentées par un nombre infini de points du plan pseudogéométrique.

(Ces points appartiennent tous au plan pseudogéométrique pourvu que

$$\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 < 0 \text{).}$$

Le résultat que je voulais énoncer est le suivant :

Tous les points $z \cdot K$ sont les sommets d'un réseau polygonal obtenu en décomposant le plan pseudogéométrique en polygones pseudogéométriquement égaux entre eux.

Les substitutions K sont celles qui transforment ces polygones les uns dans les autres, ou bien encore comme on le verra plus loin, celles qui reproduisent les fonctions que nous allons définir.

J'en ai dit assez pour faire ressortir les relations intimes et inattendues qui rapprochent l'une de l'autre deux théories en apparence si différentes et je reviens à mon sujet principal.

Généralisation des fonctions thétafuchsiennes.

Supposons qu'on ait décomposé le plan pseudogéométrique en une infinité de polygones P_0, P_1, P_2, ..., pseudogéométriquement égaux entre eux.

Soit K_i le mouvement pseudogéométrique qui permet d'appliquer le polygone P_i sur le polygone P_0.

Soit $H(z)$ une fonction rationnelle quelconque.

Envisageons la série :

$$\Theta(z) = \sum H(z \cdot K_i) \left(\frac{dz \cdot K_i}{dz} \right)^m$$

où m est un nombre entier et où i prend toutes les valeurs possibles. Pour démontrer la convergence de la série, nous allons faire voir que la série :

$$S = \sum \text{mod. } H(z \cdot k_i) \left(\frac{dz \cdot k_i}{dz} \right)^m$$

est convergente et nous allons grouper les termes de la manière suivante ; nous poserons :

$$S = S_1 + S_2 + \ldots + S_n + \ldots.$$

On aura :

$$S_n = \sum \text{mod.} H(z \cdot K_i) \left(\frac{dz \cdot K_i}{dz} \right)^m$$

Dans cette somme i prendra toutes les valeurs telles que le polygone P_i ait un sommet à l'intérieur du cercle qui a pour centre l'origine et pour rayon pseudogéométrique nλ et n'en ait pas à l'intérieur du cercle qui a pour centre l'origine et pour rayon pseudogéométrique $(n-1)\lambda$.

6. Variante : "On a donc ~~un nombre infini de quantités. Soit donc imagin~~ si".

Soit L la plus grande distance pseudogéométrique de deux points d'un des polygones P, soit Σ la surface pseudogéométrique de ces polygones. Tous les polygones P_i correspondant à S_n seront compris dans la couronne circulaire formée par les deux cercles qui ont pour centre l'origine et pour rayons pseudogéométriques $(n-1)\lambda$ et $n\lambda + L$.

Conséquence ; le nombre de ces polygones c'est-à-dire le nombre des formes de S_r est plus petit que la surface de cette couronne divisée par Σ, c'est-à-dire que

$$\frac{r}{\sum}\left[e^{(n-1)\lambda}\left(e^{\lambda+L}-1\right)+e^{(1-n)\lambda}\left(e^{-\lambda-L}-1\right)\right]$$

ou a fortiori (puisque $e^{-\lambda-L}<1$) que

$$\frac{r}{\sum}e^{(n-1)\lambda}\left(e^{\lambda+L}-1\right).$$

Supposons que z soit choisi de telle sorte qu'aucun des $z\cdot K_i$ ne rende $H(z\cdot K_i)$ infini ; on pourra trouver une quantité A telle que :

$$\text{mod. } H(z\cdot K_i) < A.$$

Supposons de plus que le polygone P_0 soit celui qui contient l'origine et que z soit à l'intérieur de ce polygone ; $z\cdot K_i$ sera à l'intérieur du polygone P_i ; d'où

$$\text{mod. } z\cdot K_i > (n-1)\lambda$$

$$\text{mod. } z < L$$

ou d'après une formule établie page 4 :

$$\text{mod}\frac{dz\cdot K_i}{dz} < \frac{\left(e^{L}+1\right)^2 e^{(n-1)\lambda}}{\left(e^{(n-1)\lambda}+1\right)^2 e^{L}},$$

d'où l'on tire

$$S_n < A\frac{\pi}{\sum}\frac{\left(e^{\lambda+L}-1\right)\left(e^{L}+1\right)^{2m}}{e^{mL}}\times\frac{e^{(n-1)\lambda(m+1)}}{\left(e^{(n-1)\lambda}+1\right)^{2m}}.$$

Il suffit d'examiner ces formules pour voir que :

$$\lim\frac{(S_{n+1})}{S_n}(\text{ pour } n=\infty) = e^{\lambda(1-m)},$$

et que par conséquent si $m>1$, la série S et la série[7] $\Theta(z)$ sont convergentes. D'ailleurs cette convergence n'est pas une semi-convergence.

On établit aisément la formule :

$$\Theta\left(z\cdot L\right)=\Theta\left(z\right)\left(\frac{dz}{dz\cdot L}\right)^m$$

L étant l'un des mouvements pseudogéométriques K_i. Cette formule montre :

1° que la série $\Theta(z)$ reste convergente quand z sort du polygone P_0.

2° que cette série jouit des mêmes propriétés que les fonctions thétafuchsiennes.

7. Variante : "...la série S et ~~par conséquent~~ la série ...".

Généralisation des fonctions fuchsiennes

Si l'on divise l'une par l'autre deux de ces fonctions analogues aux fonctions thétafuchsiennes, pourvu que la valeur du nombre entier m soit la même pour ces deux fonctions, on obtiendra une fonction $f(z)$ tout à fait analogue aux fonctions fuchsiennes. Cette fonction sera en effet méromorphe dans toute l'étendue du plan pseudogéométrique et elle se reproduira quand on changera z en $z \cdot K_i$; K_i étant le mouvement pseudogéométrique qui permet d'appliquer P_i sur P_0.

Cette fonction reprendra donc en chaque point du polygone P_i la même valeur qu'au point correspondant du polygone P_0.

Je dis que dans le polygone P_0 son module ne peut passer par un maximum ; ou un minimum à moins d'être infini ou nul ; car si la fonction $f(z)$ n'est pas infinie, elle est holomorphe et on sait que le module d'une fonction holomorphe ne peut être maximum ou minimum que s'il est nul.

Donc la fonction $f(z)$ doit devenir nulle et infinie dans l'intérieur de P_0. Car si elle ne devenait pas infinie par exemple ; son module resterait plus petit qu'une certaine quantité A dans l'intérieur de P_0 et par conséquent aussi dans l'intérieur des polygones adjacents à P_0 et par conséquent A serait un maximum de module.

Le même raisonnement s'appliquant à $f(z)-\alpha$, on conclut que $f(z)$ *peut prendre toutes les valeurs possibles à l'intérieur de* P_0.

De plus $f(\mathrm{z})$ *ne peut les prendre qu'un nombre fini de fois* ; sans quoi cette fonction devrait reprendre la même valeur en des points infiniment rapprochés ce qui n'arrive jamais aux fonctions holomorphes.

Je dis maintenant que $f(z)$ *peut servir à intégrer une équation différentielle linéaire à coefficients algébriques.*

Posons en effet :

$$x = f(z) \quad y_1 = \sqrt{\frac{df}{dz}} \quad y_2 = z\sqrt{\frac{df}{dz}}.$$

L'équation :

$$\begin{vmatrix} y & y_1 & y_2 \\ \frac{dy}{dx} & \frac{dy_1}{dx} & \frac{dy_2}{dx} \\ \frac{d^2y}{dx^2} & \frac{d^2y_1}{dx^2} & \frac{d^2y_2}{dx^2} \end{vmatrix} = 0$$

a évidemment pour intégrales

$$y = y_1 \qquad y = y_2.$$

Je dis que ses coefficients sont algébriquement en x.

En effet, on a

$$y_1\frac{dy_2}{dx} - y_2\frac{dy_1}{dx} = 1$$
$$y_1\frac{d^2y_2}{dx^2} + y_2\frac{d^2y_1}{dx^2} = 0$$

Quant au 3$^{\mathrm{e}}$ coefficient :

$$\varphi(z) = \frac{dy_1}{dx}\frac{d^2y_2}{dx^2} - \frac{dy_2}{dx}\frac{d^2y_1}{dx^2}$$

Je dis qu'il est algébrique en x. En effet il est monodrome en z ; de plus il ne change pas quand on change z en $z \cdot K_i$. En effet supposons que

$$z \cdot K_i = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \text{ où } \alpha\delta - \gamma\beta = 1.$$

On aura, si $\frac{df}{dz} = f'(z)$,

$$f'(z \cdot K_i) = \tfrac{dz \cdot K_i}{dz} = f'(z) = f'(z \cdot K_i)\, \tfrac{1}{(\gamma z + \delta)^2} \quad ,$$

d'où

$$f'(z \cdot K_i) = f'(z)\, (\gamma z + \delta)^2 .$$

Supposons qu'on change z en $z \cdot K_i$ de façon que x, y_1 et y_2 se changent en $x \cdot K_i$, $y_1 \cdot K_i$, $y_2 \cdot K_i$; on aura :

$$\begin{aligned}
&x \cdot K_i = x\\
&y_1 K_i = y_1\,(\gamma z + \delta) = \gamma y_2 + \delta y_1\\
&y_2 K_i = y_2\,(\alpha z + \beta) = \alpha y_2 + \beta y_1\\
&\tfrac{dy_1 \cdot K_i}{dx \cdot K_i} = \tfrac{\gamma dy_2 + \delta dy_1}{dx} = \tfrac{\gamma dy_2}{dx} + \delta \tfrac{dy_1}{dx}\\
&\tfrac{dy_2 \cdot K_i}{dx \cdot K_i} = \tfrac{\alpha dy_2 + \beta dy_1}{dx} = \tfrac{\alpha dy_2}{dx} + \beta \tfrac{dy_1}{dx}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d^2 y_1 \cdot K_i}{dx \cdot K_i^2} = \gamma \tfrac{d^2 y_2}{dx^2} + \delta \tfrac{d^2 y_1}{dx^2}\\
&\tfrac{d^2 y_2 \cdot K_i}{dx \cdot K_i^2} = \alpha \tfrac{d^2 y_2}{dx^2} + \beta \tfrac{d^2 y_1}{dx^2}.
\end{aligned}$$

ou enfin :

$$\varphi\,(z \cdot K_i) = \varphi(z)\,(\alpha\delta - \beta\gamma) = \varphi(z).$$

Considérons maintenant φ comme fonction de f c'est-à-dire de x. À chaque valeur de f correspondent : 1° un nombre fini de valeurs de z intérieures au polygone P_0 ; soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ces valeurs. Ces valeurs donneraient un nombre fini de valeurs de φ, φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_K$.

2° une infinité de valeurs de z extérieures à P_0. Mais celles de ces valeurs qui sont intérieures à P_i par exemple sont

$$z_1 \cdot K_i, z_2 \cdot K_i, z_3 \cdot K_i, \ldots, z_K \cdot K_i$$

pour lesquelles φ reprend les valeurs :

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_K .$$

Donc à chaque valeur de f correspondent un nombre fini de valeurs de φ.

De plus toute fonction symétrique de ces K valeurs de φ est méromorphe en f ou en x dans toute la sphère.

Donc *φ est algébrique en x.*

Donc

A toute décomposition du plan pseudogéométrique en polygones pseudogéométriquement égaux entre eux correspond une fonction analogue aux fonctions fuchsiennes et qui permet d'intégrer une équation linéaire de 2ᵈ *ordre à coefficients algébriques, mais irrationnels.*

On voit qu'il y a des fonctions dont la fonction fuchsienne n'est qu'un cas particulier et qui permettent d'intégrer des équations différentielles linéaires algébriques ; mais pour déterminer si une équation donnée est intégrable de la sorte, il faudrait une longue discussion que je me réserve d'entreprendre plus tard, mais dans laquelle je ne veux pas entrer pour le moment.

(HENRI POINCARÉ)

Chapitre 3

Concours pour le Grand Prix des Sciences Mathématiques Devise : Non inultus premor Troisième supplément

La théorie de la fonction fuchsienne repose toute entière sur la décomposition du plan pseudogéométrique en triangles pseudogéométriquement égaux ou symétriques entre eux.

Ces triangles ont pour côtés des droites pseudogéométriques c'est-à-dire des cercles coupant orthogonalement le cercle fondamental; ils ont pour angles des parties aliquotes de deux droites; de plus si deux triangles *ABC*, *ABD* par exemple sont contigus le long du côté *AB*, ils sont pseudogéométriquement symétriques par rapport à ce côté.

Mais deux droites pseudogéométriques peuvent ou bien se couper à l'intérieur du cercle fondamental, ou bien se toucher sur ce cercle, ou bien ne pas se couper. Jusqu'ici nous avons supposé que les trois droites pseudogéométriques qui limitaient notre triangle se coupaient deux à deux à l'intérieur du cercle fondamental de manière à former un triangle fermé *ABC*. Cette hypothèse n'est nullement nécessaire.

Considérons le triangle R_0 limité 1° par le cercle fondamental, 2° par trois droites pseudogéométriques a_0, b_0, c_0 qui ne se coupent pas ou qui se touchent sur le cercle fondamental.

Je dis que nous pourrons toujours décomposer le plan pseudogéométrique, c'est-à-dire l'intérieur du cercle fondamental, en triangles pseudogéométriquement égaux ou symétriques à R_0.

En effet, quand on a construit le triangle R_0, on a divisé le cercle fondamental en 4 régions :

1° L'intérieur de R_0.
2° La région comprise entre a_0 et le cercle fondamental.
3° b_0
4° c_0

Construisons un triangle R_1 symétrique de R_0 par rapport à l'un de ses côtés, par rapport à a_0 par exemple ce triangle aura pour côtés a_1 qui se confondra avec a_0, b_1 homologue de b_0 et $c_1$homologue de c_0. Il sera tout entier dans la 2^e région qu'il subdivisera en trois sous-régions, à savoir :

1° L'intérieur de R_1.
2° La région comprise entre b_1 et le cercle fondamental.
3° c_1

Le cercle fondamental se trouve ainsi divisé en 6 régions :

1° L'intérieur de R_0
2° R_1
3° La région comprise entre b_0 et le cercle fondamental.
4° c_0
5° b_1
6° c_1

Si l'on veut, construisons un nouveau triangle R_2 symétrique de R_0 par rapport à b_0 ou à c_0, ou de R_1 par rapport à b_1 ou à c_1 ; supposons par exemple que R_2 soit symétrique de R_1 par rapport à b_1 et ait pour côtés b_2 se confondant avec b_1, c_2 et a_2 ; R_2 sera tout entier dans la 5^e région et la subdivise en trois sous-régions :

1° L'intérieur de R_2.
2° La région qui s'étend de a_2 au cercle fondamental.
3° c_2

On voit qu'on pourrait continuer indéfiniment de la sorte ; chaque fois qu'on ajoute un triangle, il est tout entier compris dans des régions déjà existantes et il la subdivise en trois sous-régions.

On ne sera donc jamais arrêté.

La décomposition est donc toujours possible.

Quand elle sera effectué, on départira les triangles R_0, R_1 etc. en deux classes.

1° Les triangles R_0, R_1 etc. qui sont pseudogéométriquement égaux entre eux.

2° Les triangles R'_0, R'_1, etc. qui sont pseudogéométriquement égaux entre eux et symétriques aux premiers.

Je puis toujours supposer qu'on a choisi les valeurs de telle sorte que :

R'_0 soit pseudogéométriquement symétrique de R_0 par rapport à a_0.
R'_1 R_1 a_1.
R'_2 R_2 a_2.

Cela posé, on pourra considérer ce plan pseudogéométrique comme décomposé en quadrilatères

$$Q_0 = R_0 + R'_0, \qquad Q_1 = R_1 + R'_1,$$

pseudogéométriquement égaux entre eux.

Nous appellerons, en reprenant nos solutions primitives K_i l'opération qui change Q_0 en Q_i ; et nous écrirons

$$Q_i = Q_0 K_i$$

On sait que K_i change z en

$$\frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i},$$

a_i, b_i, c_i, d_i étant des constantes.

Nous écrirons encore comme précédemment

$$zK_i = \frac{a_i z + b_i}{c_i z + d_i}.$$

Fonctions Thétafuchsiennes.

Soit $H(z)$ une fonction rationnelle donnée de z ; K l'une quelconque des opérations K_i définies plus haut, nous formerons comme précédemment la série suivante :

$$\sum H\,(z \cdot k) \left(\tfrac{dz \cdot K}{dz}\right)^m, \quad m \text{ étant un entier.}$$

Cherchons donc les conditions de convergence de cette série. Nous avons trouvé que si :

$$\operatorname{mod} z < \rho \qquad \operatorname{mod} z \cdot K > \rho_1$$
$$\operatorname{mod} \tfrac{dz \cdot k}{dz} - \tfrac{1-\rho_1^2}{1-\rho^2}.$$

Donnons un instant à z une valeur *fixe*, choisie de telle sorte que tous les $H(z \cdot K)$ restent finis, on pourra poser :

$$\operatorname{mod} H(z \cdot K) < A \qquad (A \text{ une constante})$$

On aura donc :

$$\operatorname{mod} \left[H\,(z \cdot K) \left(\frac{dz \cdot K}{dz} \right)^m \right] < A \left[\frac{1-\rho_1^2}{1-\rho^2} \right]^m.$$

Soit N le nombre [1] des points $z \cdot K$ dont le module est plus petit que ρ_1 ; les rayons autour de l'un quelconque de ces points $z \cdot K$; le cercle C lieu des points dont la distance pseudogéométrique à $z \cdot K$ en λ ; ou si l'on veut le cercle C qui a pour centre pseudogéométrique $z \cdot K$ et pour rayon λ et choisissons λ assez petit pour que tous ces cercles ne se coupent pas.

Soit R le rayon pseudogéométrique du cercle qui a pour centre l'origine et pour rayon géométrique ρ_1 ; on aura par définition :

$$R = L\frac{1+\rho_1}{1-\rho_1}.$$

Tous ces cercles C seront contenus tout entiers à l'intérieur du cercle D qui a pour centre l'origine et pour rayon pseudogéométrique $R\lambda$. Soit Σ leur surface pseudogéométrique ; celle du cercle D sera :

$$\pi \left(e^{R+\lambda} + e^{-R-\lambda} - 2 \right)$$

1. Variante : "N le ~~maximum des~~".

On aura donc

$$N < \frac{\pi}{\Sigma}(e^{R+\lambda} + e^{-R-\lambda} - 2).$$

Donc, il ne pourra pas y avoir plus de N termes dont le module soit plus grand que :[2]

$$\frac{A}{\left(1-\rho^2\right)^m}\left(1-\rho_1^2\right)^m = \frac{A}{\left(1-\rho_2^2\right)^m}\left(\frac{2}{e^R + e^{-R} + 2}\right)^m.$$

Formons donc les termes de la série proposée dans un ordre tel que les modules de ces termes aillent en décroissant.

Elle s'écrira alors :[3]

(1) $\quad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots.$

et on aura :

$$\text{mod}.u_{n+1} \leq \text{mod}.u_n.$$

Elle sera convergente et sa somme sera indépendante de l'ordre des termes pourvu que la série

(2) $\quad \text{mod}.u_1 + \text{mod}.u_2 + \ldots + \text{mod}.u_n + \text{mod}.u_{n+1} + \ldots.$

soit convergente.

Écrivons la série (2) sous la forme suivante :[4]

(3) $\quad U_1 + U_2 + \ldots + U_p + U_{p+1} + \ldots.$

Dans cette série U_1 est la somme des termes de la série (1) dont le module est plus grand que $\frac{2^m A}{\left(1-\rho^2\right)^m}\frac{1}{\left(e+e^{-1}+2\right)^m}$, et en général U_n est la somme des termes de la série (2) dont le module est compris entre :

$$\frac{2^m A}{\left(1-\rho^2\right)^m}\frac{1}{(e^n + e^{-n} + 2)^m} \text{ et } \frac{2^m A}{\left(1-\rho^2\right)^m} - \frac{1}{\left(e^{n-1} + e^{-n+1} + 2\right)^m}$$

Les termes de la série (3) seront respectivement plus petits que ceux de la série[5]

(4) $\quad U_1 + \frac{2^m A}{\left(1-\rho^2\right)^m}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{(e^n+e^{-n}+2)^m}\left(e^{n+\lambda+1} + e^{-n-\lambda-1} - 2\right)\pi.$

Or cette série est convergente pourvu que $m > 1$.

Donc la série (1) est convergente.

Elle définit une fonction que nous appellerons thétafuchsienne, qui est méromorphe dans toute l'étendue du cercle fondamental, et qui est multipliée par $\left(\frac{dz\cdot K}{dz}\right)^{-m}$ quand on change z en $z \cdot K$.

Si l'on divise l'une par l'autre deux fonctions thétafuchsiennes correspondant à une même valeur de m, on obtient une fonction méromorphe dans toute l'étendue du cercle fondamental, et qui ne change pas quand on change z en $z \cdot K$.

Cette fonction permet d'intégrer une équation différentielle linéaire à coefficients algébriques, ainsi qu'on le verra plus loin et nous l'appellerons par analogie, fonction fuchsienne.

2. Variante : l'index de ρ_2 est barré.
3. Variante : "$\cancel{u_0 + u_1 + \ldots}$".
4. Variante : "(mod u_0 + mod $u_1 + \ldots +$ mod u_n)".
5. Variante : le deuxième terme commence par un Σ barré.

Le quadrilatère pseudogéométrique Q_0 est limité 1° par le cercle fondamental ; 2° par 4 arcs de cercle a_0, b_0, c_0, d_0 qui coupent orthogonalement ce cercle et que, conformément à une définition donnée dans un des suppléments précédents, j'appelle droites pseudogéométriques. Formons les cercles A_0, B_0, C_0, D_0 dont font partie les arcs de cercle a_0, b_0, c_0, d_0 ; appelons Q_0 la partie du plan qui est extérieur à la fois au cercle fondamental et aux quatre cercles A_0, B_0, C_0, D_0. Les points de Q_0 seront ceux qui ont même argument que les points de Q_0 et module inverse.

Appelons de même Q_i' la région occupée par les points qui ont même argument que ceux de Q_i et module inverse. Nous aurons :

$$Q_i' = Q_0 K_i.$$

Nous avons fait voir que la série thétafuchsienne est convergente toutes les fois que z est à l'intérieur de Q_0, de Q_1, etc. ou de Q_i ; nous démontrerions de la même façon (en changeant très peu de choses au raisonnement) que la série thétafuchsienne est encore convergente toutes les fois que z est à l'intérieur de Q_0', de Q_1', etc. ou de Q_i' ; ou bien toutes les fois que z est sur l'arc de cercle fondamental qui sert de frontière commune à Q_0 et Q_0', ou bien à Q_1 et Q_1', etc. ou bien à Q_i et Q_i'. Il suit de là que la fonction thétafuchsienne et par conséquent la fonction fuchsienne est méromorphe dans toute la région $Q_0 + Q_0$' et n'y présente aucun point singulier essentiel. Elle ne peut donc reprendre la même valeur qu'un nombre fini de fois à l'intérieur de cette région.

Cela posé soit $F(z)$ la fonction fuchsienne ; nous écrirons comme nous l'avons toujours fait jusqu'ici :

$$x = F(z) \quad y_1 = \sqrt{\frac{dP}{dz}} \quad y_2 = \sqrt{\frac{dF}{dz}}.$$

Les deux fonctions y_1 et y_2 satisferont à une équation différentielle de la forme :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_1 \frac{dy}{dx} + P_o y = 0.$$

On reconnaîtrait aisément que $P_1 = 0$. Considérons P_0 comme une fonction de x, nous reconnaîtrons que cette fonction n'est susceptible que d'un nombre fini de valeurs pour chaque valeur de x ; que de plus elle ne présente aucun point singulier essentiel. C'est donc une fonction algébrique de x.

Ce raisonnement ne serait pas applicable dans le cas où deux des cercles A_0, B_0, C_0, D_0, viendraient à se toucher sur le cercle fondamental ; car le point de contact serait un point singulier essentiel. Le résultat serait encore vrai, je ne veux pas le démontrer ici, car ce n'est là qu'un cas particulier et la démonstration est très longue.

Je retiendrai cependant un cas particulier extrêmement important ; c'est celui où A_0, B_0, C_0, D_0 sont tangents deux à deux sur le cercle fondamental. On se rappelle que dans le premier supplément, j'ai traité le cas où les cercles A_0, B_0, C_0, D_0 se coupaient à l'intérieur du cercle fondamental et de telle façon que :

angle de A_0 et de $B_0 = \frac{2\pi}{\alpha}$

angle de C_0 et de $D_0 = \frac{2\pi}{\beta}$
angle de B_0 et de C_0 = angle de A_0 et de $D_0 = \frac{\pi}{\gamma}$

α, β et γ étant des entiers.

Dans ce cas le plan pseudogéométrique se trouvait décomposé en une infinité de quadrilatères pseudogéométriques $Q_0, Q_1, \ldots, Q_i$ de telle façon que

$$Q_i = Q_0 K_i.$$

Il existait alors une fonction $f(z)$ méromorphe dans toute l'étendue du cercle fondamental, n'étant altérée par aucune des opérations K_i , et ne prenant à l'intérieur de chacun des quadrilatères Q_i qu'une seule fois une valeur donnée.

C'était la fonction fuchsienne proprement dite.

Si l'on posait

$$x = f(z) \qquad y_1 = \sqrt{\frac{df}{dz}} \qquad y_2 = z\sqrt{\frac{df}{dz}}$$

y_1 et y_2 satisfaisaient à une équation différentielle linéaire :

$$(2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + P_o y = 0.$$

P_0 étant une fonction rationnelle de x.

Faisons tendre maintenant les nombres entiers α, β, γ vers l'infini. À la limite les cercles A_0, B_0, C_0, D_0 viendront se toucher deux à deux sur le cercle fondamental, de telle sorte que nous tomberons dans le cas particulier que nous nous proposons d'étudier. À la limite l'équation (2) sera celle qui lie au carré du module les périodes d'une fonction elliptique multipliées par une certaine fonction algébrique du carré de ce module.

Supposons qu'à la limite de l'équation (2) s'écrive :

$$(2bis) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = H_0 y.$$

Cette équation aura deux intégrales dont le rapport z sera lié à x par une relation que l'on pourra mettre sous la forme :

$$x = \varphi(z).$$

On reconnaîtrait aisément : [6]

1° que le carré du module de la fonction elliptique qui a pour périodes K et K' est égal à :

$$\varphi\left[\frac{aK + bK'}{cK + dK'}\right],$$

a, b, c, d étant des constantes faciles à déterminer.

6. Variante : "…aisément : ~~1° que $\varphi(z)$ est méromorphe dans le cercle fondamental ; 2° que $\varphi(z) = \lim f(z)$ pour $\alpha = \beta = \gamma = \infty$~~".

2° que $\varphi(z)$ est méromorphe dans le cercle fondamental (c'est une conséquences de ce qui précède et des travaux de M. Hermite sur le module considéré comme fonction des périodes).

3° que $\varphi(z) = \lim f(z)$ quand α, β, γ tendent vers l'infini.

4° que $\varphi(z)$ ne peut prendre qu'une seule fois une même valeur à l'intérieur du quadrilatère Q_0.

5° que $\varphi(z)$ prend à l'intérieur du quadrilatère Q_0 toutes les valeurs possibles sauf 0, 1 et ∞ si l'on suppose pour fixer les idées que H_0 devient infini pour $x = 0$ et $x = 1$.

La transcendante qui exprime le carré du module en fonction du rapport des périodes est donc un cas particulier des fonctions fuchsiennes.

Nous allons voir maintenant quel parti on peut tirer de cette fonction $\varphi(z)$ pour l'intégration d'une équation différentielle linéaire quelconque ne présentant que deux points singuliers à distance finie.

Remarquons d'abord que $\varphi(z)$ ne devenant jamais infinie à l'intérieur ducercle fondamental est holomorphe à l'intérieur de ce cercle et peut par conséquent être représentée par une série ordonnée suivant les puissances croissantes de z et convergente dans toute l'étendue du plan pseudogéométrique. Il est aisé d'ailleurs de calculer les coefficients de cette série.

Soit maintenant

$$(3) \qquad X_p \tfrac{d^p y}{dx^p} + X_{p-1} \tfrac{d^{p-1} y}{dx^{p-1}} + \ldots + X_1 \tfrac{dy}{dx} + X_0 y = 0$$

une équation différentielle linéaire ; je suppose que X_0, X_1, etc. sont des polynômes en x ; et que l'équation ne présente que deux points singuliers à distance finie, de telle sorte que :

$$X_p = (x-a)^\alpha (x-b)^\beta.$$

Je puis toujours supposer

$$a = 0 \qquad b = 1$$

d'où

$$X_p = x^\alpha (n-1)^\beta.$$

Car si l'on n'avait pas $a = 0$, $b = 1$, il suffirait d'un changement très simple de variable pour lever la difficulté.

Soient

$$y_1, y_2, \ldots, y_p$$

les intégrales de l'équation (3).

Quand x décrira un contour fermé n'enveloppant ni le point $x = 0$, ni le point $x = 1$, ces fonctions reviendront à leur valeur initiale ; si au contraire x décrit un contour fermé enveloppant l'un ou l'autre de ces points ou tous deux, les valeurs finales de ces fonctions sont des fonctions linéaires des valeurs initiales. Appelons C_i le contour décrit par x. Supposons que z représente le rapport des intégrales de l'équation (2 bis) et se change en $z \cdot K_i$ quand x décrit le contour C_i. L'opération K_i sera l'une de celles qui n'altèrent pas $\varphi(z)$; ce sera par exemple celle qui change le quadrilatère pseudogéométrique Q_0 en Q_i. Supposons que quand x décrit le contour C_i ; y_1, y_2, $\ldots$, y_p se changent en :

$$\begin{array}{c}\alpha_{i.1.1}y_1+\alpha_{i.1.2}y_2+\dots\dots\dots\dots+\alpha_{i.1.p}y_p\\ \alpha_{i.2.1}y_1+\alpha_{i.2.2}y_2+\dots\dots\dots\dots+\alpha_{i.2.p}y_p\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_{i.p.1}y_1+\alpha_{i.p.2}y_2+\dots\dots\dots\dots+\alpha_{i.p.p}y_p\end{array}$$

Pour abréger, nous appellerons L_i l'opération qui consiste à faire ce changement, et nous dirons que quand x décrit le contour C_i, y_1, y_2, …, y_p se changent en

$$y_1L_i,\, y_2L_i, \dots, y_pL_i$$

Posons $x=\varphi(z)$; quand z prendra toutes les valeurs possibles [7] à l'intérieur du cercle fondamental, x prendra toutes les valeurs possibles excepté 0, 1 et ∞ ; si z décrit un contour fermé quelconque à l'intérieur du cercle fondamental, x décrira un coutour fermé n'enveloppant ni le point C, ni le point L, y_1, y_2, …, y_p reviendront donc à leurs valeurs primitives ; on a donc :

$$y_1=\theta_1(z) \qquad y_2=\theta_2(z)\dots\dots y_p=\theta_p(z)$$

$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ étant des fonctions de z méromorphes à l'intérieur du cercle fondamental.

Quand z va de z en $z\cdot K_i$, x décrit un contour tel que C_i ; et y_1, y_2, …, y_p se changent en y_1L_i, y_2L_i, …, y_pL_i.

On a donc les identités :

$$\theta_1(z\cdot K_i)=\theta_1(z)L_i, \theta_2(z\cdot K_i)=\theta_2(z)L_i, \dots, \theta_p(z\cdot K_i)=\theta_p(z)L_i$$

qui définissent la propriété fondamentale des nouvelles fonctions. C'est dire que les fonctions $\theta_1(z)$, …, $\theta_p(z)$ sont tout à fait analogues aux fonctions zétafuchsiennes que nous avons rencontrées dans le premier supplément. On démontrerait qu'on peut les obtenir en divisant par une fonction thétafuchsienne une série analogue aux séries thétazéta définies dans le premier supplément et dont on démontrerait la convergence de la même manière.

Mais les fonctions θ_1, θ_2, …, θ_p sont susceptibles d'un développement en séries bien plus utile. En effet y_1, y_2 …, y_p ne peuvent devenir finies que pour :

$$x=0, \quad x=1 \qquad \text{ou} \quad x=\infty.$$

Or la variable x ne peut atteindre une de ces valeurs pour une valeur de z intérieure au cercle fondamental. Donc ces fonctions θ_1, θ_2, …, θ_p sont holomorphes à l'intérieur de ce cercle et peuvent être représentées par une série entière dont il est aisé de calculer les coefficients.

Les équations :

$$x=\varphi(z) \quad y_1=\theta_1(z) \quad y_2=\theta_2(z)\dots y_p=\theta_p(z)$$

nous donnerons donc une intégration complète de l'équation (3). Ce mode d'intégration est contenu en germe dans le mémoire de M. Picard sur les fonctions entières (Annales de l'École Normale Supérieure, Mai 1880). Je tiens à faire cette remarque, bien que j'ai été conduit au résultat par une marche toute différente de celle qui aurait permis de le déduire du mémoire de M. Picard.

7. Variante : "…quand z ~~décrira un contour quelconque fermé~~" prendra …".

Résumé.

Grâce à ces transcendantes nouvelles auxquelles j'ai donné le nom de fonction fuchsiennes, thétafuchsiennes et zétafuchsiennes, je montre qu'on peut intégrer un grand nombre d'équations linéaires à coefficients rationnels ou algébriques.

Dans la 2^{de} partie du mémoire principal, j'intègre toutes les équations du 2^{d} ordre telles que :

1° Les coefficients soient rationnels.

2° Il n'y ait que deux points singuliers à distance finie.

3° La différence des racines de chacune des équations déterminantes soit une partie aliquote de l'unité.

4° Il n'y ait point de logarithmes dans les développements des intégrales dans le voisinage des points singuliers.

Dans le 1^{er} supplément, j'intègre toutes les équations du 2^{d} ordre qui satisfont à la $1^{ère}$ à la 2^{de} et à la 4^{e} de ces conditions et qui de plus sont telles que les racines des équations déterminantes soient commensurables.

Dans le 2^{d} supplément, j'étends ce résultat à un grand nombre d'équations du 2^{d} ordre à coefficients irrationnels.

Enfin dans le 3^{e} supplément, j'intègre les équations linéaires à *coefficients rationnels d'ordre quelconque*, pourvu qu'il n'y ait que *deux points singuliers à distance finie*.

Rappelons un résultat obtenu dans la $1^{ère}$ partie du mémoire principal :

l'on montre que si l'on a une équation linéaire à coefficients polynomiaux

$$X_p \frac{d^p y}{dx^p} + X_{p-1} \frac{d^{p-1} y}{dx^{p-1}} + \ldots + X_1 \frac{dy}{dx} + X_o y = 0 \tag{4}$$

et si l'on appelle degré de cette équation le degré de celui des polynômes $X_0, X_1, \ldots, X_p$ qui contient x à la puissance la plus élevée, l'intégration d'une équation du m^e degré et du p^e ordre se ramène à celle d'une équation du m^e ordre et du p^e degré.

En effet, en posant dans l'équation (4)

$$y = \int e^{zx} v dz$$

(l'intégrale étant prise le long d'un contour convenablement choisi) v devra être une fonction de z liée à cette variable par une équation de la forme :

$$Y_m \frac{d^m v}{dz^m} + Y_{m-1} \frac{d^{m-1} v}{dz^{m-1}} + \ldots + Y_1 \frac{dv}{dz} + Y_0 v = 0 \tag{5}$$

où $y_0, y_1, \ldots, y_m$ sont des polynômes en z.

Si l'équation (4) est du m^e degré et du p^e ordre, nous avons vu que l'équation (5) doit être du m^e ordre et du m^e degré.

Soit donc une équation du 2^{d} ordre quelconque ; on ramènera son intégration à celle d'une équation du 2^{d} degré ; or les équations du 2^{d} degré ne peuvent présenter que deux points singuliers à distance finie. Elles font donc partie de la classe d'équations différentielles que nous avons appris à intégrer.

Cette méthode permet donc d'intégrer toutes les équations du 2^d^ *ordre à coefficients rationnels.*

Je ne doute pas d'ailleurs que les nombreuses équations envisagées par M. Fuchs dans son mémoire inséré au Tome 71 du Journal de Crelle et dont l'équation (2 bis) n'est qu'un cas particulier ne fournissent une infinité de transcendantes analogues à $\varphi(z)$, $\theta_1(z)$, $\theta_2(z)$, $\ldots$, $\theta_p(z)$ et que ces fonctions nouvelles ne permettent d'intégrer toutes les équations différentielles linéaires à coefficients algébriques.

Bibliographie

Appell, P. et Drach, J., dir. *Œuvres d'Henri Poincaré, Volume 1*. Paris : Gauthier-Villars, 1928.

Barrow-Green, J. E. *Poincaré and the Three Body Problem*. Providence : AMS/LMS, 1997.

Beltrami, E. Essai d'interprétation de la géométrie non-euclidienne. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* 6, 1869, 251–288.

Bertrand, J. Sur la somme des angles d'un triangle. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 69, 1869, 1265–1269.

—. Sur la démonstration relative à la somme des angles d'un triangle. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 70, 1870, 17–20.

Châtelet, A., dir. *Œuvres d'Henri Poincaré, Volume 5*. Paris : Gauthier-Villars, 1950.

Cooke, R. *The Mathematics of Sonya Kovalevskaya*. New York : Springer, 1984.

Darboux, G., Nörlund, N. E., et Lebon, E., dir. *Œuvres d'Henri Poincaré, Volume 2*. Paris : Gauthier-Villars, 1916.

Dedekind, R. Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modul-Functionen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 83, 1877, 265–292.

Dieudonné, J. La découverte des fonctions fuchsiennes. In *Actes du VIe congrès du regroupement des mathématiciens d'expression latine, Luxembourg, 7–12 septembre 1981*. Publié par Congrès du Groupement des mathématiciens d'expression latine, 3–23. Paris : Gauthier-Villars, 1982.

Freudenthal, H. Poincaré et les fonctions automorphes. In *Le livre du centenaire de la naissance de Henri Poincaré 1854–1954*. Publié par Académie des sciences de Paris, 212–219. Paris : Gauthier-Villars, 1955.

Fuchs, L. Sur une classe de fonctions de plusieurs variables tirées de l'inversion des intégrales de solutions des équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions rationnelles ; Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 90, 1880a, 678–680.

—. Sur une classe de fonctions de plusieurs variables tirées de l'inversion des intégrales de solutions des équations différentielles linéaires dont les coefficients sont des fonctions rationnelles ; Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 90, 1880b, 735–736.

—. Über eine Classe von Functionen mehrerer Variabeln, welche durch Umkehrung der Intergrale von Lösungen der linearen Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten entstehen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 89, 1880c, 151–169.

Fuchs, R. et Schlesinger, L., dir. *Gesammelte mathematische Werke von L. Fuchs, Volume 2*. Berlin : Mayer & Müller, 1906.

Gilain, C. *La théorie géométrique des équations différentielles de Poincaré*. Thèse, Université Paris 1, Paris, 1977.

—. La théorie qualitative de Poincaré et le problème de l'intégration des équations différentielles. *Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences* 34, 1991, 215–242.

Gray, J. The three supplements to Poincaré's prize essay of 1880 on Fuchsian functions and differential equations. *Archives Internationales d'Histoire des Sciences* 32, 1982, 221–235.

—. *Linear Differential Equations and Group Theory from Riemann to Poincaré*. Boston : Birkhäuser, 2d édition, 2000.

Hermite, C. *Cours d'analyse de l'École polytechnique*. Paris : Gauthier-Villars, 1873.

Hoüel, J. Essai d'une exposition rationelle des principes fondamentaux de la géométrie élémentaire. *Archiv der Mathematik und Physik* 40, 1863, 171–211.

Julia, G. et Petiau, G., dir. *Œuvres d'Henri Poincaré, Volume 11*. Paris : Gauthier-Villars, 1956.

Klein, F. *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*. Erlangen : A. Deichert, 1872.

Lobachevsky, N. I. Études géométriques sur la théorie des parallèles. *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux* 4, 1866, 8–120.

Minarelli, C. Théorie des parallèles. *Nouvelles annales de mathématiques* 8, 1849, 312–314.

Poincaré, H. Sur les applications de la géométrie non-euclidienne à la théorie des formes quadratiques. *Association française pour l'avancement des sciences* 10, 1881a, 132–138.

—. Sur les fonctions fuchsiennes. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 92, 1881b, 1484–1487.

—. Sur les fonctions fuchsiennes. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 92, 1881c, 1274–1276.

—. Sur une nouvelle application et quelques applications importantes des fonctions fuchsiennes. *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences de Paris* 92, 1881d, 859–861.

—. *Science et méthode*. Paris : Flammarion, 1908.

—. Extrait d'un mémoire inédit de Henri Poincaré sur les fonctions fuchsiennes. *Acta mathematica* 39, 1923, 58–93.

Pont, J.-C. *L'aventure des parallèles : histoire de la géométrie non euclidienne ; précurseurs et attardés*. Bern : Peter Lang, 1986.

Schlesinger, L., dir. *Gesammelte mathematische Werke von L. Fuchs, Volume 1*. Berlin : Mayer & Müller, 1904.

Scholz, E. *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré*. Basel : Birkhäuser, 1980.

Schwarz, H. A. Über diejenigen Fälle, in welchen die Gaussiche hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elements darstellt. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 75, 1873, 292–335.

—. *Gesammelte mathematische Abhandlungen von H. A. Schwarz, Volume 2*. Berlin : Springer, 1890.